برنامج تمهيدي ماجستير الإحصاء التطبيقي

مادة الاحصاء الرياضي

أستاذ المادة: أ.م. د/ آمال السيد عبد الغني مبارك

الفصل الرابع

بعض التوزيعات الاحتمالية:

عمل الطالبات:

- يارا السيد تقي الدين.
- سارة غريب العدل.
- تسنيم السيد عطية.

9-4EXPONENTIAL DISTRIBUTION:

9-4 التوزيع الأسي :-

التعريف Definition :

المتغير العشوائي X الذي يساوي المسافة بين التتابعات المتتالية لـ عملية بواسون بمتوسط 0 <λ هي متغير عشوائي أسي مع معلمة λ .

دالة كثافة الاحتمال لـ X هي:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for} \quad 0 \le x < \infty \qquad (4\text{-}14)$$

الدالة التراكمية (التجميعية):

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

خصائص التوزيع:

- التوقع و التباين للتوزيع الأسي :-

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (4\text{-}15)$$

4-10.2 Gamma Distribution

توزيع جاما:

التعريف Definition :

دالة التوزيع هي :

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx, \quad \text{for } r > 0 \qquad (4\text{-}19)$$

حيث أن:

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$$

$$\Gamma(r) = (r-1)!$$

مثال:

$\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$. و $\Gamma(1) = 0! = 1$

يمكن تفسير دالة جاما على أنها تعميم للقيم غير الصحيحة لـ r .

يمكن الآن تحديد دالة كثافة احتمالية جاما كالتالي:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad \text{for } x > 0 \qquad (4\text{-}20)$$

حيث أن:

$\lambda > 0$ and $r > 0$.

خصائص التوزيع:

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا لجاما بمعلماتλ و r ،فان التوقع والتباين كالتالي:

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2 \qquad (4\text{-}21)$$

يوضح الشكل 4-26 مخططات توزيع غاما لعدة قيمλ و r.

يمكن توضيح أن دالة f (x) تفي بخصائص دالة كثافة الاحتمال ، وما يلي يمكن الحصول على النتيجة. يمكن استخدام التكامل بالتجزئة المتكرر ، لكن التفاصيل طويلة.

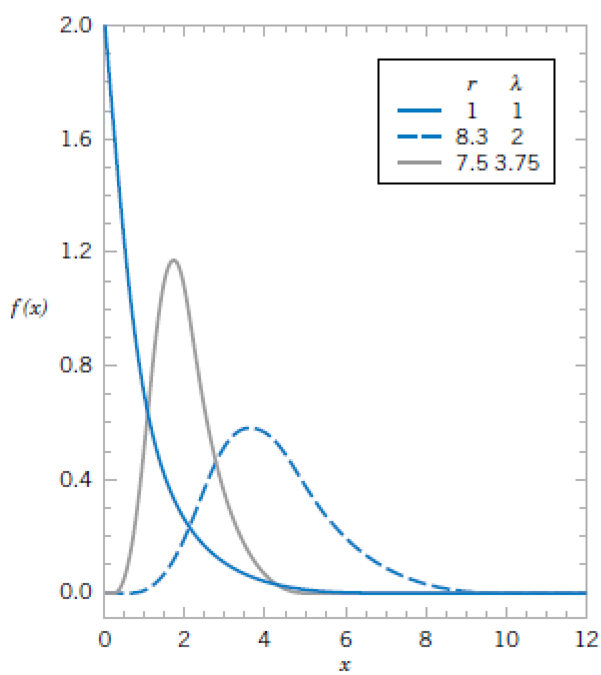

Figure 4-26 Gamma probability density functions for selected values of λ and r.

4-11 WEIBULL DISTRIBUTION

توزيع وايبل:

كما ذكرنا سابقًا ، غالبًا ما يتم استخدام توزيع وايبل لنمذجة الوقت حتى الفشل للعديد من الأنظمة الفيزيائية المختلفة. توفر المعلمات في التوزيع الكثير من المرونة لنموذج النظم التي يزيد فيها عدد الأعطال مع الوقت ، ينقص مع الوقت (بعض أشباه الموصلات) ، أو يبقى ثابتًا مع الوقت (الفشل الناجمة عن الصدمات الخارجية للنظام).

Definition التعريف:

المتغير العشوائي X مع دالة كثافة الاحتمال التاليه:

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}\right], \quad \text{for } x > 0 \qquad (4\text{-}22)$$

حيث أن :

$\delta > 0$ و $\beta > 0$.

يتم توضيح مرونة توزيع وايبل من خلال الرسوم البيانية لدوال كثافة الاحتمال المحددة في الشكل (4-27). من خلال فحص دالة كثافة الاحتمال ، يمكن ملاحظة ذلك عندما β=1 يكون توزيع وايبل مطابق للتوزيع الأسي. غالبًا ما تُستخدم دالة التوزيع التراكمي لحساب الاحتمالات. يمكن الحصول على النتيجة التالية :

الدالة التراكمية (التجميعية):

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}} \qquad (4\text{-}23)$$

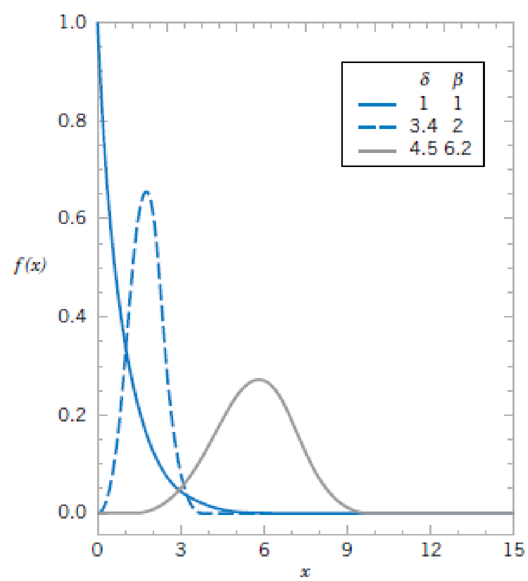

Figure 4-27 Weibull probability density functions for selected values of δ and β.

خصائص التوزيع:

يمكن توضيح التوقع والتباين كالتالي:

$$\mu = E(x) = \delta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{and} \quad \sigma^2 = V(x) = \delta^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \qquad (4\text{-}24)$$

4-12 LOGNORMAL DISTRIBUTION

التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي:

في بعض الأحيان تتبع المتغيرات في النظام علاقة أسية مثل $x = exp(w)$. إذا كان الأس هو متغير عشوائي ، فلنفترض أن $W, X = \exp(W)$ متغير عشوائي ويكون توزيع X مفيدًا. تحدث حالة خاصة مهمة عندما يكون W يتوزع طبيعيا. في هذه الحالة ، يُطلق على توزيع X التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي. يتبع الاسم من التحويل $\ln(X) = W$. أي أنه يتم توزيع اللوغاريتم الطبيعي لـ X بشكل طبيعي.

يتم الحصول على احتمالات X من التحول إلى W ، لكننا بحاجة إلى التعرف أن مدي X هو (0،∞) .افترض أن W يتم توزيعه طبيعيا بالمتوسط θ والتباين ω^2 ؛ تكون دالة التوزيع التراكمي لـ X هي

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \le x] = P[\exp(W) \le x] = P[W \le \ln(x)] \\ &= P\left[Z \le \frac{\ln(x) - \theta}{\omega}\right] = \Phi\left[\frac{\ln(x) - \theta}{\omega}\right] \end{aligned}$$

التعريف :

Let W have a normal distribution mean θ and variance ω^2; then $X = \exp(W)$ is a **log-normal random variable** with probability density function

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\omega^2}\right] \qquad 0 < x < \infty$$

The mean and variance of X are

$$E(X) = e^{\theta + \omega^2/2} \quad \text{and} \quad V(X) = e^{2\theta + \omega^2}\left(e^{\omega^2} - 1\right) \qquad (4\text{-}25)$$