برنامج تمهيدي ماجستير الإحصاء التطبيقي

مادة الاحصاء الرياضي

أستاذ المادة: أ.م. د/ آمال السيد عبد الغني مبارك

الفصل السابع

طرق التقدير الاحصائية:

عمل الطالبات:

- يارا السيد تقي الدين.
- سارة غريب العدل.
- تسنيم السيد عطية.

7-2 GENERAL CONCEPTS OF POINT ESTIMATION

7-2.1 Unbiased Estimators

2-7 المفاهيم العامة لتقدير النقاط:

2.1-7 المقدرات الغير متحيزة:

يجب أن يكون المقدر "قريبًا" إلى حد ما من القيمة الحقيقية للمعلمة غير المعروفة. نقول بشكل عام إن $\hat{\Theta}$ مقدر غير متحيز إذا كانت القيمة المتوقعة لـ$\hat{\Theta}$ تساويθ . وهذا يعادل القول بأن متوسط التوزيع الاحتمالي ل$\hat{\Theta}$ (أو متوسط توزيع العينات ل$\hat{\Theta}$) يساوي.θ.

Definition

مقدر النقاط $\hat{\Theta}$ هو مقدر غير متحيز للمعلمة .θ إذا كان:

$$E(\hat{\Theta}) = \theta \qquad (7\text{-}1)$$

إذا كان المقدر متحيز ، فإن الفرق

$$E(\hat{\Theta}) - \theta \qquad (7\text{-}2)$$

يسمى مقدار التحيز.

عندما يكون المقدر غير متحيز ، يكون الانحياز صفرًا ؛ $E(\hat{\Theta}) - \theta = 0.$

EXAMPLE 7-1

افترض أن X متغير عشوائي بمتوسط μ وتباين σ^2. افترض ان $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية حجمها n من المجتمع ممثلة بـ X. وضح أن متوسط العينة $\overline{X}$ وتباين العينة S^2 هما مقدرين غير متحيزين لـ μ ، وσ^2 على التوالي. ضع في اعتبارك ان متوسط العينة هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع $E(\overline{X}) = \mu.$. الآن فكر في تباين العينة. نحن لدينا

$$E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}\right] = \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}E\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + \overline{X}^2 - 2\overline{X}X_i) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right]$$

$$E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$E(\overline{X}^2) = \mu^2 + \sigma^2/n,$$

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} (\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \sigma^2/n)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}(n\mu^2 + n\sigma^2 - n\mu^2 - \sigma^2)$$

$$= \sigma^2$$

ولذلك، فإن تباين العينة S^2 هو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع σ^2. .

7-2.2 Proof That S is a Biased Estimator of σ (CD Only)
7-2.3 Variance of a Point Estimator

2.2-7 إثبات أن S هو مقدر متحيز لـ σ (CD فقط)

2.3-7 تباين مقدر النقاط:

لنفترض ان $\hat{\Theta}_1$ ، و $\hat{\Theta}_2$ هم مقدرات غير متحيزة . هذا يشير إلى أن توزيع كل مقدر يتمحور حول القيمة الحقيقية لـ θ. ومع ذلك ، قد يختلف تباين هذه التوزيعات. يوضح الشكل 7-1 الوضع. نظرًا لان $\hat{\Theta}_1$ له تباين أقل من المقدر $\hat{\Theta}_2$ ، من المرجح أن $\hat{\Theta}_1$ ينتج تقديرًا قريبًا من القيمة الحقيقية θ. من المبادئ المنطقية للتقدير ، عند الاختيار من بين العديد من المُقدِّرات ، اختيار المقدر الذي يحتوي على الحد الأدنى من التباين.

Definition

إذا أخذنا بعين الاعتبار جميع المُقدِّرات غير المتحيزة ، فإن المقدر الذي لديه أصغر تباين يُطلق عليه المُقدِّر الأدنى غير المتحيز للتغير (MVUE).

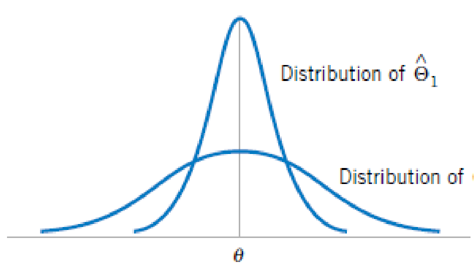

Figure 7-1 The sampling distributions of two unbiased estimators $\hat{\Theta}_1$ and $\hat{\Theta}_2$.

Standard Error: Reporting a Point Estimate 2.4-7

2.4-7 الخطأ المعياري: الإبلاغ عن تقدير نقطة:

عندما يتم الإبلاغ عن القيمة العددية أو تقدير النقطة للمعلمة ، فمن المستحسن عادة إعطاء فكرة عن دقة التقدير. مقياس الدقة المستخدم عادة هو الخطأ المعياري للمُقدِّر الذي تم استخدامه.

Definition

الخطأ المعياري للمُقدِّر $\hat{\Theta}$ هو انحرافه المعياري بواسطة $\sigma_{\hat{\Theta}} = \sqrt{V(\hat{\Theta})}$. إذا تضمن الخطأ المعياري معلمات غير معروفة يمكن تقديرها ، فإن استبدال هذه القيم $\sigma_{\hat{\Theta}}$ ينتج خطأ معياريًا تقديريًا ، يُشار إليه بـ $\hat{\sigma}_{\hat{\Theta}}$.

في بعض الأحيان يتم الإشارة إلى الخطأ المعياري المقدر بواسطة $s_{\hat{\Theta}}$ أو $se(\hat{\Theta})$. لنفترض أننا نأخذ عينات من توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 . الآن التوزيع طبيعي ل $\overline{X}$ مع المتوسط μ والتباين σ^2/n، وبالتالي فإن الخطأ المعياري ل $\overline{X}$ هو

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

إذا لم نعرف σ ولكن استبدلنا نموذج الانحراف المعياري S في المعادلة أعلاه ، فسيكون الخطأ المعياري المقدر ل $\overline{X}$ هو

$$\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

7-3 METHODS OF POINT ESTIMATION

3-7 طرق تقدير النقاط:

لا تقدم تعريفات عدم التحيز والخصائص الأخرى للمُقدِّرات أي توجيهات حول كيفية الحصول على مُقَدِّرات جيدة. في هذا القسم ، نناقش طريقتين للحصول على مقدرات النقاط: طريقة العزوم وطريقة الاحتمالية القصوى. تكون تقديرات الاحتمالية القصوى مفضلة بشكل عام على مقيمي العزوم لأن لها خصائص كفاءة أفضل. ومع ذلك ، في بعض الأحيان يكون من السهل أحيانًا حساب المقدرات الفورية. كلتا الطريقتين يمكن أن تنتج مقدرات نقطية غير متحيزة.

7-3.1 Method of Moments

طريقة العزوم:

الفكرة العامة وراء طريقة العزوم هي مساواة عزوم المجتمع ، والتي يتم تعريفها من حيث القيم المتوقعة ، بعزوم العينة المقابلة. ستكون عزوم المجتمع دوال لمعلمات غير معروفة. ثم يتم حل هذه المعادلات للحصول على مقدرات المعلمات غير المعروفة.

Definition

لنكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع الاحتمال f(x) ، حيث يمكن أن تكون f (x) دالة كثافة احتمالية منفصلة أو دالة كثافة احتمالية مستمرة.

kth هي عزوم المجتمع (أو عزوم التوزيع)و هي $E(X^k)$ ... ,K= 1,2, عزم العينة kth المقابلة هي $(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i^k, k = 1, 2, \ldots$

للتوضيح ، أول عزم للمجتمع هو $E(X) = \mu$, ، وعزم العينة الأولى هو $(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$. وهكذا ، من خلال مساواة عزوم العينة والمجتمع ، نجد أن $\hat{\mu} = \overline{X}$. وهذا يعني أن متوسط العينة هو العزم المقدر لمتوسط المجتمع . في الحالة العامة ، ستكون عزوم المجتمع دوال لمعلمات التوزيع غير المعروفة ، على سبيل المثال ، $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

EXAMPLE 7-3

لنفترض أن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع أسي مع معلمة λ . الآن هناك معلمة واحدة فقط لتقديرها ، لذا يجب أن نساوي E(X) بـ $\overline{X}$. بالنسبة إلى التوزيع الأسي $E(X) = 1/\lambda$. لذلك ، $E(X) = \overline{X}$ ينتج عن ذلك $1/\lambda = \overline{X}$, العزم المقدر $\hat{\lambda} = 1/\overline{X}$.

7-3.2 Method of Maximum Likelihood

طريقة الامكان الاعظم:

واحدة من أفضل الطرق للحصول على مقدر النقاط للمعلمة هي طريقة الامكان الاعظم. تم تطوير هذه التقنية في عشرينيات القرن الماضي. كما يوحي الاسم ، سيكون المقدر هو قيمة المعلمة التي تزيد من دالة الاحتمال.

Definition

افترض أن X متغير عشوائي بتوزيع احتمالي $f(x; \theta)$، حيث θ معلمة واحدة غير معروفة. افترض $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تكون القيم الملاحظة في عينة عشوائية من الحجم n. ثم تكون دالة احتمالية العينة

$$L(\theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \cdots \cdot f(x_n; \theta) \qquad (7\text{-}5)$$

لاحظ أن دالة الاحتمالية هي الآن دالة للمعلمة غير المعروفة θ. الحد الأقصى لتقدير الاحتمالية ل θ هو قيمة θ التي تزيد من دالة الاحتمالية $L(\theta)$.

في حالة المتغير العشوائي المنفصل ، يكون تفسير دالة الاحتمال واضحًا. دالة الاحتمالية للعينة $L(\theta)$ هي الاحتمال فقط

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

EXAMPLE 7-6

افترض X متغيرًا عشوائيًا لـ Bernoulli. دالة الكتلة الاحتمالية هي

$$f(x; p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

حيث p هي المعلمة المراد تقديرها. دالة الاحتمالية لعينة عشوائية من الحجم n هي

$$\begin{aligned} L(p) &= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\ &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه إذا زاد $\hat{p}$ من $L(p)$ إلى أقصى حد ، فإن $\hat{p}$ يزيد أيضًا من $\ln L(p)$ وبالتالي

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln(1-p)$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1-p}$$

يساوي ذلك صفرًا ويحل عوائد p وبالتالي $\hat{p} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} x_i$. ، فإن الحد الأقصى لمقدر الاحتمالية لـ p هو

$$\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

7-3.3 Bayesian Estimation of Parameters (CD Only)

يستخدم هذا الكتاب طرق الاستدلال الإحصائي على أساس المعلومات الواردة في بيانات العينة. في الواقع ، تفسر هذه الطرق الاحتمالات على أنها ترددات نسبية. في بعض الأحيان نسمي الاحتمالات التي يتم تفسيرها بهذه الطريقة الاحتمالات الموضوعية. هناك نهج آخر للاستدلال الإحصائي ، يسمى نهج بايزي ، يجمع بين معلومات العينة مع

معلومات أخرى قد تكون متاحة قبل جمع العينة. في هذا القسم نوضح بإيجاز كيف يمكن استخدام هذا النهج في تقدير المعلمات.

افترض أن المتغير العشوائي X لديه توزيع احتمالي يكون دالة لمعلمة واحدة θ. سنكتب هذا التوزيع الاحتمالي حيث يشير هذا التدوين إلى أن الشكل الدقيق لتوزيع $f(x \mid \theta)$ مشروط بالقيمة المخصصة له θ. يتألف النهج الكلاسيكي للتقدير من أخذ عينة عشوائية من الحجم n من هذا التوزيع ثم استبدال قيم العينة xi في المُقدِّر لـ θ. كان من الممكن تطوير هذا المُقَيِّم باستخدام نهج الاحتمالية القصوى ، على سبيل المثال.

لنفترض أن لدينا بعض المعلومات الإضافية حول θ. يمكننا تلخيص تلك المعلومات في شكل توزيع احتمالي لـ θ ، على سبيل المثال ، $f(\theta)$ غالبًا ما يطلق على هذا التوزيع الاحتمالي التوزيع القبلي لـ θ ، ونفترض أن متوسط التوزيع القبلي هو μ_0 وأن التباين هو σ_0^2. هذا مفهوم جديد للغاية فيما يتعلق ببقية هذا الكتاب لأننا الآن ننظر إلى المعلمة θ كمتغير عشوائي. غالبًا ما تسمى الاحتمالات المرتبطة بالتوزيع القبلي بالاحتمالات الذاتية ، لأنها تعكس عادة درجة اعتقاد المحلل فيما يتعلق بالقيمة الحقيقية لـ θ. يستخدم نهج بايزي للتقدير التوزيع القبلي للعينة $\theta, f(\theta)$ ، والتوزيع الاحتمالي المشترك للعينة ، على سبيل المثال $f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta)$ لإيجاد توزيع بعدي ل θ ، على سبيل المثال $f(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، يحتوي هذا التوزيع البعدي على معلومات من العينة والتوزيع القبلي لθ. بمعنى ما ، فإنه يعبر عن درجة اعتقادنا فيما يتعلق بالقيمة الحقيقية θ بعد ملاحظة بيانات العينة. من السهل من الناحية المفاهيمية العثور على التوزيع الخلفي. التوزيع الاحتمالي المشترك للعينة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ والمعلمة θ (تذكر أن θ متغير عشوائي) هو

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta) f(\theta)$$

والتوزيع الهامشي ل $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هو

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \sum_{\theta} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta), & \theta \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)\, d\theta, & \theta \text{ continuous} \end{cases}$$

لذلك ، التوزيع المطلوب هو

$$f(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

نحدد مقدر بايز θ بالقيمة $\tilde{\theta}$ التي تتوافق مع متوسط التوزيع البعدي $f(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

في بعض الأحيان ، يمكن تحديد متوسط التوزيع البعدي لـθ بسهولة. كدالة $\theta, f(\theta \mid x_1, \ldots, x_n)$ ، هي دالة كثافة احتمالية و $x_1, \ldots, x_n$ هي مجرد ثوابت. لأن θ. تدخل $f(\theta \mid x_1, \ldots, x_n)$ فقط من خلال$f(x_1, \ldots, x_n, \theta)$ ما إذا تم الاعتراف كدالة لـθ كدالة احتمالية معروفة ، يمكن استنتاج الوسط البعدي θ. من التوزيع المعروف جيدًا بدون تكامل أو حتى حساب $f(x_1, \ldots, x_n)$.

EXAMPLE S7-2

افترض $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تكون عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي مع المتوسط μ والتباين σ^2. ، حيث يكون μ غير معروف و σ^2. معروف. افترض أن التوزيع القبلي توزيع طبيعي مع متوسط μ_0 والتباين σ_0^2; هذا هو

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-(\mu-\mu_0)^2/(2\sigma_0^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-(\mu^2-2\mu_0\mu+\mu_0^2)/(2\sigma_0^2)}$$

التوزيع الاحتمالي المشترك للعينة هو

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(1/2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-(1/2\sigma^2)(\sum x_i^2 - 2\mu\sum x_i + n\mu^2)}$$

وبالتالي ، فإن التوزيع الاحتمالي المشترك للعينةو μ هو

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-(1/2)[(1/\sigma_0^2+n/\sigma^2)\mu^2-(2\mu_0/\sigma_0^2+2\sum x_i/\sigma^2)\mu+\sum x_i^2/\sigma^2+\mu_0^2/\sigma_0^2]}$$

$$= e^{-(1/2)\left[\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/n}\right)\mu^2-2\left(\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}+\frac{\bar{x}}{\sigma^2/n}\right)\mu\right]} h_1(x_1, \ldots, x_n, \sigma^2, \mu_0, \sigma_0^2)$$

عند استكمال المربع في الأس

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) = e^{-(1/2)\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/n}\right)\left[\mu^2-\left(\frac{(\sigma^2/n)\mu_0}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}+\frac{\bar{x}\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}\right)\right]^2} h_2(x_1, \ldots, x_n, \sigma^2, \mu_0, \sigma_0^2)$$

حيث $h_i(x_1, \ldots, x_n, \sigma^2, \mu_0, \sigma_0^2)$ هي دالة للقيم المرصودة $\sigma^2, \mu_0, \text{and } \sigma_0^2$. الآن ، لأن $f(x_1, \ldots, x_n)$ لا تعتمد على μ,

$$f(\mu \mid x_1, \ldots, x_n) = e^{-(1/2)\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/n}\right)\left[\mu^2 - \left(\frac{(\sigma^2/n)\mu_0 + \sigma_0^2 \bar{x}}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}\right)\right]} h_3(x_1, \ldots, x_n, \sigma^2, \mu_0, \sigma_0^2)$$

يتم التعرف على ذلك كدالة كثافة احتمالية عادية ذات متوسط بعدي

$$\frac{(\sigma^2/n)\mu_0 + \sigma_0^2 \bar{x}}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}$$

والتباين البعدي

$$\left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma^2/n}\right)^{-1} = \frac{\sigma_0^2(\sigma^2/n)}{\sigma_0^2 + \sigma^2/n}$$

وبالتالي ، فإن تقدير Bayes هو μ متوسط مرجح قدره μ_0 and $\bar{x}$. . لأغراض المقارنة ، لاحظ أن الحد الأقصى لتقدير الاحتمالية لـ μ is $\hat{\mu} = \bar{x}$.