محاضرات في الهندسة التفاضلية

لطلاب كلية التربية (عام)

الفرقة الرابعة - قسم الرياضيات

(جزء أول - استكمال لدراسة المنحنيات)

(يتبعه جزء ثاني خاص بالسطوح)

إعداد

د. محمد رضا كامل الجندي

بسم الله الرحمن الرحيم (استكمال ما سبق)

تعيين الانحناء k واللي τ والثلاثي المتحرك $\underline{b}$, $\underline{n}$, $\underline{t}$ ومعادلات المستويات الثلاث (اللاصق والعمودي والمقوم) لمنحنى فراغي

أولاً: إذا أعطى المنحنى بدلالة البارامتر الطبيعي

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}(s)}$$

$$\underline{t} = \dot{\underline{r}} \ , \quad \underline{n} = \frac{\ddot{\underline{r}}}{|\ddot{\underline{r}}|} \ , \quad \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n}$$

$$k = |\ddot{\underline{r}}| \ , \quad \tau = \frac{(\dot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}}, \dddot{\underline{r}})}{|\ddot{\underline{r}}|^2}$$

ثانياً: إذا أعطى المنحنى بدلالة بارامتر عام

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}(u)}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{r}'}{|\underline{r}'|} \ , \quad \underline{b} = \frac{\underline{r}' \wedge \underline{r}''}{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|} \ , \quad \underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t}$$

$$k = \frac{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3} \ , \quad \tau = \frac{(\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}''')}{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|^2}$$

أما معادلات المستويات الثلاث (سواء كان $\underline{r} = \underline{r}(u)$ أو $\underline{r} = \underline{r}(s)$) عند نقطة x_0 على المنحنى المعطى ونفرض أن $x = (x, y, z)$ نقطة في المستوى المطلوب فإن

اللاصق: $(x - x_0) \cdot \underline{b} = 0$

العمودي: $(x - x_0) \cdot \underline{t} = 0$

المقوم: $(x - x_0) \cdot \underline{n} = 0$

مثال(1) : اذا كان متجه الموضع لأي نقطة على منحنى C هو

$$\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)$$

(i) اوجد عند نقطة على المنحنى كل من $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}, k, \tau$

(ii) اثبت ان العمودين الجانبيين للمنحنى عند النقطتين $\alpha = (-8, -12, 12)$, $\beta = (1, 6, 3)$ متعامدان

(iii) اوجد معادلة كل من المستوى اللاصق والعمودي والمقوم عند النقطة β

(iv) اثبت ان المنحنى يصنع عند جميع نقطه زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت

— الحل —

$$\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)$$

$$\underline{r}' = (3u^2, 6, 6u) = 3(u^2, 2, 2u)$$

$$\underline{r}'' = (6u, 0, 6) = 6(u, 0, 1)$$

$$\underline{r}''' = (6, 0, 0) = 6(1, 0, 0)$$

$$\underline{r}' \wedge \underline{r}'' = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3u^2 & 6 & 6u \\ 6u & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u^2 & 2 & 2u \\ u & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18(2, u^2, -2u)$$

$$|\underline{r}' \wedge \underline{r}''| = 18\sqrt{4 + u^4 + 4u^2} = 18\sqrt{(u^2+2)^2} = 18(u^2+2)$$

$$|\underline{r}'| = 3\sqrt{u^4 + 4 + 4u^2} = 3\sqrt{(u^2+2)^2} = 3(u^2+2)$$

$$k = \frac{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3} = \frac{18(u^2+2)}{27(u^2+2)^3} = \frac{2}{3(u^2+2)^2}$$

$$(\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}''') = (3)(6)(6) \begin{vmatrix} u^2 & 2 & 2u \\ u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (6)(6)(6)$$

$$\tau = \frac{(\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}''')}{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|^2} = \frac{(6)(6)(6)}{(18)(18)(u^2+2)^2} = \frac{2}{3(u^2+2)^2}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{r}'}{|\underline{r}'|} = \frac{3(u^2, 2, 2u)}{3(u^2+2)} = \frac{1}{u^2+2}(u^2, 2, 2u)$$

$$\underline{b} = \frac{\underline{r}' \wedge \underline{r}''}{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|} = \frac{18(2, u^2, -2u)}{18(u^2+2)} = \frac{1}{u^2+2}(2, u^2, -2u)$$

$\boxed{3}$

$$\underline{n} = \underline{b} \wedge \underline{t} = \frac{1}{(u^2+2)^2} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & u^2 & -2u \\ u^2 & 2 & 2u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(u^2+2)^2} \left(2u^3+4u ,\ -2u^3-4u ,\ 4-u^4\right)$$

$$= \frac{1}{(u^2+2)^2} \left(2u(u^2+2),\ -2u(u^2+2),\ (2-u^2)(2+u^2)\right)$$

$$= \frac{1}{u^2+2} \left(2u,\ -2u,\ 2-u^2\right)$$

(ii) النقطة $\beta = (1, 6, 3)$ تناظر القيمة $u=1$ على المنحني $\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)$

أما النقطة $\alpha = (-8, -12, 12)$ فتناظر القيمة $u=-2$

$$\underline{b} = \frac{1}{u^2+2}(2, u^2, -2u) \Rightarrow \underline{b}_\beta = \underline{b}_{(u=1)} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)$$

$$\underline{b}_\alpha = \underline{b}_{(u=-2)} = \frac{1}{6}(2, 4, 4)$$

$$\underline{b}_\alpha \cdot \underline{b}_\beta = \frac{1}{6}(2,4,4) \cdot \frac{1}{3}(2,1,-2) = \frac{1}{18}\left((2)(2)+(4)(1)+(4)(-2)\right) = 0$$

$$\therefore\ \underline{b}_\alpha \perp \underline{b}_\beta$$

(iii) المستويات الثلاثة المارة بالنقطة $x_0 = \beta = (1, 6, 3)$

* المستوى اللاصق:

$$(x - x_0) \cdot \underline{b}_\beta = 0 \Rightarrow (x-1, y-6, z-3) \cdot \frac{1}{3}(2, 1, -2) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + (y-6) - 2(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y - 2z = 2$$

** المستوى العمودي:

$$(x - x_0) \cdot \underline{t}_\beta = 0 \Rightarrow (x-1, y-6, z-3) \cdot \frac{1}{3}(1, 2, 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1) + 2(y-6) + 2(z-3) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 2z = 19$$

*** المستوى المقوم:

$$(x - x_0) \cdot \underline{n}_\beta = 0 \Rightarrow (x-1, y-6, z-3) \cdot \frac{1}{3}(2, -2, 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-1) - 2(y-6) + (z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + z = -7$$

(iv) المطلوب اثبات ان المنحنى يصنع عند جميع نقطه زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت اى المطلوب إثبات أن الزاوية التى يصنعها المماس (وبالتالى التى يصنعها $\underline{t}$) عند جميع نقط المنحنى مع متجه ثابت وليكن $\underline{a}$ هى زاوية ثابتة

عند أى نقطة على المنحنى كان $\underline{t} = \frac{1}{u^2+2}\left(u^2, 2, 2u\right)$

فاذا كان $\underline{a} = (1, 1, 0)$ فان (الزاوية θ بين $\underline{t}$ وبين $\underline{a}$) هى

$$\cos\theta = \frac{\underline{t} \cdot \underline{a}}{|\underline{t}|\,|\underline{a}|} = \frac{\frac{1}{u^2+2}\left((1)(u^2) + 2(1) + 2u(0)\right)}{1 \cdot \sqrt{(1)^2+(1)^2}} = \frac{\frac{u^2+2}{u^2+2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

أى ان المنحنى يصنع عند جميع نقطه زاوية ثابتة (مقدارها $\frac{\pi}{4}$) مع الاتجاه $\underline{a} = (1, 1, 0)$

ملاحظات :

(1) تعاملنا مع البارامتر u باعتباره بارامتر عام وليس البارامتر الطبيعى وذلك ليس لأن رمزه u وليس s ولكن لأنه لا يحقق الشرط المطلوب ليكون البارامتر الطبيعى وهو $|\underline{r}'| = 1$

(2) اذا كان البارامتر هو البارامتر الطبيعى وتعاملنا معه باعتباره بارامتر عام فلا يوجد خطأ فى ذلك ولكن العكس غير صحيح

(3) نلاحظ فى اجابة هذا المثال أننا قد حصلنا على قيم الانحناء k والـ τ عند أى نقطة عامة على المنحنى فكان $k = \tau = \frac{2}{3(u^2+2)}$ أى ان $\frac{k}{\tau} = 1$

المنحنيات التى عند كل نقطة عليها يتحقق أن $\frac{k}{\tau} = c$ (ثابت) تسمى منحنيات حلزونية وسنتعرض لها بعد قليل. أى ان المثال المعطى هو منحنى حلزونى ($c = 1$)

(4) فى المطلوب (iv) عينا الاتجاه $\underline{a}$ من ملاحظة وجود المركبتين u^2, 2 فى المتجه $\underline{t}$ ووجود المقدار u^2+2 فى مقام المتجه وسوف نعطى عند دراسة المنحنيات الحلزونية طريقة أعم من ذلك لتعيين الاتجاه الثابت.

__سؤال__ أوجد عند النقطة $(0, 0, 1)$ كل من $k, \tau, \underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ وكذلك معادلات المستويات اللاصق والعمودى والمقوم وذلك للمنحنى

$$\underline{r} = \left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

سبق أن عرفنا اللي عند نقطة على منحنى فراغي بأنه معدل دوران المستوى اللاصق بالنسبة الى s وبينا أن $\underline{b}$ عمودي على المستوى اللاصق وبالتالى فإنه عكسه تياس اللي معدل دوران العمود الجانبي $\underline{b}$ ومن ذلك خلصنا إلى أن

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \underline{n}$$

والآن نقدم نظرية تربط بين اللي للمنحنى عند نقطة عليه وبين وضع المنحنى في الفراغ

<u>نظرية:</u> الشرط الضروري والكافي كي يكون منحنى الفراغ مستوى (أي يقع بأكمله في مستوى) هو أن ينعدم اللي عند جميع نقط المنحنى أي أن يكون $\tau = 0$

البرهان

(I) <u>الشرط ضروري:</u>

<u>نفرض أن المنحنى مستوى</u> فمن تعريف المستوى اللاصق فإنه (أي المستوى اللاصق) يقع في ذات المستوى الذي يقع فيه المنحنى وبالتالى فإن المستوى اللاصق ثابت عند جميع نقط المنحنى وبالتالى فإن أي عمودي على المستوى اللاصق يكون متجه ثابت وبالتالى فإن $\underline{b}$ متجه ثابت وبالتالى فإن $\frac{d\underline{b}}{ds} = \underline{0}$

ولكن $\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \underline{n} \Rightarrow \tau \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\tau = 0}$

(II) <u>نفرض أن $\tau = 0$</u> عند جميع نقط المنحنى وحيث أن $\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau \underline{n}$

$$\therefore \frac{d\underline{b}}{ds} = 0\underline{n} = \underline{0}$$

وهذا يعني أن $\underline{b}$ متجه ثابت أي توجد أعداد ثابتة λ, μ, ν بحيث أن

$$\underline{b}(\lambda, \mu, \nu)$$

الآن نفرض أن $\underline{r} = (x, y, z)$ متجه الموضع لأي نقطة عامة على المنحنى

$$\therefore \frac{d}{ds}(\underline{r} \cdot \underline{b}) = \dot{\underline{r}} \cdot \underline{b} + \underline{r}\,\underline{b}'$$
$$= \underline{t} \cdot \underline{b} + \underline{r}\,\underline{b}'$$

الطرف الأيمن ينعدم (وذلك لأن $\underline{t} \perp \underline{b}$ ، $\underline{b}$ متجه ثابت وبالتالى $\underline{b}' = 0$)

$$\therefore \frac{d}{ds}(\underline{r} \cdot \underline{b}) = 0 \Rightarrow \underline{r} \cdot \underline{b} = c \quad (\text{ثابت } c)$$

وحيث ان $\underline{r} = (x, y, z)$, $\underline{b} = (\lambda, \mu, \nu)$

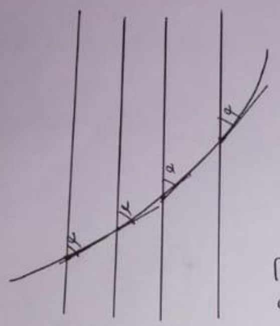
$$\therefore \underline{r} \cdot \underline{b} = c \Rightarrow \lambda x + \mu y + \nu z = c \quad (*)$$

وهذه المعادلة (*) هي معادلة مستوى . أي أن متجه الموضع $\underline{r}$ لأي نقطة على المنحنى تقع على مستوى <u>أي أن المنحنى مستوى</u>

إنتهى البرهان

المنحنى الحلزوني

يعرف المنحنى الحلزوني بأنه منحنى فراغي يصنع عند جميع نقطه زاوية ثابتة α مع اتجاه ثابت في الفراغ a



وتسمى α زاوية الحلزون.

يمكننا أن نلاحظ الآتي:

(i) الخط المستقيم هو منحنى حلزوني :-

لأن المماس عند اي نقطة عليه هو نفس الخط المستقيم وبالتالي فان الاتجاه الثابت هو نفسه المستقيم كما أن زاوية الحلزون $\alpha = 0$

(ii) المنحنى الذي يقع بأكمله في مستوى واحد هو أيضا منحنى حلزوني :-

لأن المماس عند اي نقطة على المنحنى يصنع زاوية ثابتة مع الاتجاه العمودي على المستوى الذي يحوي المستقيم وتكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$

(iii) في الحالة العامة (غير الحالتين في (i)، (ii)) يمكن أيضا تعريف المنحنى الحلزوني بأنه المنحنى المرسوم على إسطوانة (بمفهوم الإسطوانة العامة الذي سبق ذكره في المحاضرة الأولى) بحيث يصنع المماس للمنحنى زاوية ثابتة مع رواسم الإسطوانة.

(iv) كحالة خاصة من تعريف المنحنى الحلزوني في (iii) نعرف الحلزون الدائري كالآتي:

هو المنحنى الحلزوني (iii) المرسوم على اسطوانة دائرية.

ومعادلة المنحنى الحلزوني الدائري تكون على الصورة

$$\underline{r} = (a\cos u, a\sin u, a u\cot\alpha) \quad , \alpha, a \text{ ثوابت } (*)$$

أو بصورة أخرى

$$\underline{r} = (a\cos u, a\sin u, bu) \quad , a, b \text{ ثوابت } (**)$$

لاحظ أن (*) أو (**) هي معادلة خاصة فقط من معادلات الحلزون (تخص المنحنى الحلزوني الدائري فقط)

6 نظرية: الشرط الضروري والكافي لكي يكون منحنى الفراغ حلزوني هو: $\frac{k}{\tau}$ = مقدار ثابت

البرهان

<u>أولاً الشرط الضروري:</u> نفرض أن المنحنى حلزوني ∴ المماس يصنع زاوية ثابتة α مع وحدة اتجاهية ثابتة في الفراغ $\underline{a}$ أي أن

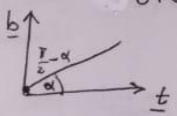
$$\underline{t}\cdot\underline{a} = \cos\alpha \qquad (1)$$

فاذا ما استبعدنا حالة الخط المستقيم وهي التي فيها $k=0$ وبتفاضل (1) بالنسبة الى s

$$\therefore k\underline{n}\cdot\underline{a} = 0 \Rightarrow \underline{n}\cdot\underline{a} = 0 \qquad (2)$$

وهذه المعادلة تعني أن $\underline{a}\perp\underline{n}$ وهذا يعني أن $\underline{a}$ يقع في المستوى الذي يحتوي $\underline{t}, \underline{b}$ أي أن

$$\underline{a} = \lambda\underline{t} + \mu\underline{b} \qquad (3)$$



وبضرب (3) في $\underline{t}$

$$\therefore \underline{a}\cdot\underline{t} = \lambda \Rightarrow \lambda = \cos\alpha$$

وبضرب (3) في $\underline{b}$

$$\therefore \underline{a}\cdot\underline{b} = \mu \Rightarrow \mu = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\therefore \underline{a} = (\cos\alpha)\,\underline{t} + (\sin\alpha)\,\underline{b}$$

وبتفاضل (2) بالنسبة الى s

$$\dot{\underline{n}}\cdot\underline{a} = 0 \Rightarrow (\tau\underline{b} - k\underline{t})\cdot[(\cos\alpha)\underline{t} + (\sin\alpha)\underline{b}] = 0$$

$$\Rightarrow \tau\sin\alpha - k\cos\alpha = 0 \Rightarrow \frac{k}{\tau} = \tan\alpha = \text{ثابت}$$

<u>ثانياً الشرط كافٍ:</u> نفرض أن $\frac{k}{\tau} = c$ (c ثابت) ونثبت أن المنحنى حلزوني

$$\frac{k}{\tau} = c \Rightarrow k - c\tau = 0 \quad (c \text{ ثابت})$$

لكن $\frac{d\underline{t}}{ds} = k\underline{n}$, $\frac{d\underline{b}}{ds} = -\tau\underline{n} \Rightarrow \frac{d\underline{t}}{ds} + c\frac{d\underline{b}}{ds} = k\underline{n} - c\tau\underline{n} = (k - c\tau)\underline{n}$

$$\therefore \frac{d}{ds}(\underline{t} + c\underline{b}) = (k - c\tau)\underline{n} = 0\underline{n} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{t} + c\underline{b} = \underline{l} \quad (\underline{l} \text{ متجه ثابت})$$

وبالقسمة على المقدار الثابت $\sqrt{1+c^2}$

$$\Rightarrow \frac{\underline{t} + c\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{\underline{l}}{\sqrt{1+c^2}} = \underline{a} \quad (\text{متجه ثابت})$$

نلاحظ أن $\underline{a}$ متجه ثابت وأن الزاوية بين $\underline{a}$ وبين $\underline{t}$ هي α حيث

$$\cos\alpha = \underline{t}\cdot\underline{a} = \underline{t}\cdot\frac{\underline{t} + c\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \text{مقدار ثابت}$$

∴ المنحنى الحلزوني.

إنتهى البرهان

ملاحظة(1) اذا كان المنحنى حلزوني وكان $\frac{k}{\tau} = c$ فان الاتجاه الثابت هو

$$\underline{a} = \frac{\underline{l}}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{\underline{t} + c\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}}$$

كما ان α زاوية الحلزون تعطى من العلاقة

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

ملاحظة(2) يمكن تعيين الاتجاه الثابت وزاوية الحلزون في المثال السابق باستخدام العلاقتين أعلاه في ملاحظة (1)

ملاحظة(3) يسمى الاتجاه الثابت $\underline{a}$ في تعريف المنحنى الحلزوني "اتجاه الاسطوانة" المرسوم عليها المنحنى.

تمارين

(1) إثبت أن المنحنى $\underline{r} = (u, 2u^2, \frac{8}{3}u^3)$ منحنى حلزوني وأوجد زاويته واتجاه الاسطوانة المرسوم عليها

(2) إثبت أن المنحنى $\underline{r} = (8u, -6u^2, 3u^3)$ منحنى حلزوني وأوجد زاويته واتجاه الاسطوانة المرسوم عليها. وأوجد معادلة المستوى الملاصق للمنحنى عند النقطة $(8, -6, 3)$ وكذلك وحدة العمود الاساسي عند النقطة $(4, -\frac{3}{2}, \frac{3}{8})$.

الأصفار ورتبة الالتصاق

لتكن $X=X(t)$ منحنى ما ولتكن Σ سطح في الفراغ ولتكن a نقطة مشتركة بينهما عند $t=t_0$ ولتكن $\phi(t)$ هي الدالة الناتجة من التعويض من المنحنى في معادلة المستوى فإذا كان

$$\phi(t_0)=\phi'(t_0)=\cdots=\phi^{(n-1)}(t_0),\quad \phi^{(n)}(t_0)\neq 0$$

حينئذ نقول أن المنحنى والمستوى لهما التصاق من رتبة $(n-1)$ وأن لهما موضع صفري من رتبة (n)

مثال لتكن $X=X(s)$ هو المنحنى ⊛ $X=\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

معادلة المستوى اللاصق عند النقطة التي عندها $s=0$ هي (**) $y=z$

(سبق إثبات ذلك في المحاضرة)

الآن نقول رتبة الالتصاق بين المنحنى ⊛ والمستوى (**) عند النقطة $s=0$

أولاً نوجد الدالة $\phi(s)$ وذلك بالتعويض من ⊛ في (**)

$$\therefore\ \sin\frac{s}{\sqrt{2}}=\frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \phi(s)=\sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{s}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi(0)=0$$

$$\phi'(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \phi'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1)-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$\phi''(s)=-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}} \qquad \phi''(0)=0$$

$$\phi'''(s)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}} \qquad \phi'''(0)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\neq 0$$

∴ المنحنى والسطح لهما عند $s=0$ التصاق من الرتبة الثانية

(موضع صفري من الرتبة الثالثة)

ملاحظة هامة: إذا اشتركت n نقطة على المستوى لتقترب قرباً لانهائياً من النقطة المشتركة بين المستوى ومنحنى ما. فإنه يكون بين المستوى والنقطة التصاق من رتبة n.

ملاحظة: من تعريف المستوى اللاصق عند نقطة على منحنى ما (هو المستوى الناتج من حركة نقطتين على المنحنى (وبالتالي مستوى) لتقترب من النقطة المعطاة. من هنا التعريف فإن المستوى اللاصق والمنحنى (عند النقطة المشتركة) يكون لهما التصاق من الرتبة الثانية كما رأينا ذلك في المثال السابق.

ملاحظة: كلما ذكر عن الالتصاق والمستوى يظل صحيح بدون أي تغيير لو استبدلنا كلمة "سطح" بدلاً من كلمة "مستوى"

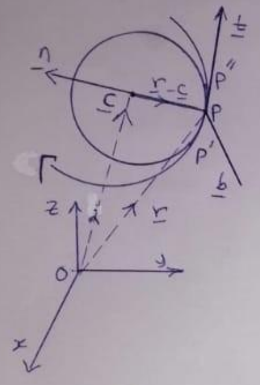
ملاحظة: يمكن للطالب التأكد من أن المنحنى والمستوى اللاصق لهما عند النقطة المشتركة التصاق من الرتبة الثانية فيما يمر به من مسائل وأمثلة على سبيل المثال في مثال سابق كان

$\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)$

ومعادلة المستوى اللاصق عند $u=1$ كانت $2x + y - 2z = 2$

دائرة الإنحناء لمنحنى الفراغ

نفرض أن Γ منحنى فراغي وأن P نقطة عليه



اذا كانت P', P'' نقطتين اخريين على Γ وكانت P, P'', P' ليست على استقامة واحدة فانه يمر بها دائرة (كما نعرف فإن اي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها دائرة) كلما تغير موضعي P', P'' فاننا نحصل على دائرة مختلفة تمر بها وتمر بالنقطة P الوضع النهائي للدائرة التي تمر بكل من P ، P' ، P'' تسمى دائرة الإنحناء (بمراجعة تعريف المستوى اللاصق ندرك سريعاً أن دائرة الإنحناء تقع بأكملها في المستوى اللاصق)

<u>المسألة الآن هي: اذا اعطينا نقطة P تقع على منحنى معطى Γ فهل علينا ان نعين</u> معادلة دائرة الإنحناء وكذلك مركزها ونصف قطرها.

وذلك نفرض أن Γ معطى بالصورة $\underline{r} = \underline{r}(s)$

لذلك نفرض أن متجه الموضع لهذه الدائرة هو $\underline{c}$ وان متجه الموضع للنقطة P هو $\underline{r}$ هذه الدائرة علينا الحصول عليها من تقاطع كرة مركزها $\underline{c}$ ونصف قطرها ρ ولها التصاق من الرتبة الثانية مع المنحنى $\underline{r} = \underline{r}(s)$

معادلة الكرة هي $\rho = |\underline{c} - \underline{r}|$ وبالتربيع نجد أن $(\underline{r} - \underline{c})^2 = \rho^2$ ①

وبحل ① مع معادلة المنحنى $\underline{r} = \underline{r}(s)$ نحصل على $(\underline{r}(s) - \underline{c})^2 = \rho^2$ أو

$$F(s) = (\underline{r}(s) - \underline{c})^2 - \rho^2 \qquad (3)$$

الدالة $F(s)$ يجب أن تحقق $F'(s) = F''(s) = 0$ لوجود التصاق من الرتبة الثانية

$$0 = F'(s) = 2(\underline{r}(s) - \underline{c})\,\dot{\underline{r}}(s)$$

$$0 = \frac{F'(s)}{2} = \underline{t}\cdot(\underline{r}(s) - \underline{c}) = 0 \qquad (4)$$

بتفاضل ④ مرة اخرى

$$\therefore\ 0 = \frac{F''(s)}{2} = \dot{\underline{t}}(r(s) - \underline{c}) + \underline{t}\cdot\underline{t}$$

$$\Rightarrow \underline{t}'(r(s) - \underline{c}) = -1$$

$$\Rightarrow k\,\underline{n}(\underline{r}(s) - \underline{c}) = -1 \qquad (5)$$

لكن المتجه $\underline{c} - \underline{r}$ يمر بالنقطة P نستطيع تحليله بدلالة متجهات الوحدة المتعامدة $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ المارة بالنقطة P اي علينا كتابة

$$\underline{r}(s) - \underline{c} = \lambda\underline{t} + \mu\underline{n} + \nu\underline{b} \qquad (6)$$

وبضرب (6) في $\underline{t}$ والتعويض من (4) نحصل على:

$$0 = \underline{t}(\underline{r}(s) - \underline{c}) = \underline{t}(\lambda \underline{t} + \mu \underline{n} + \nu \underline{b}) = \lambda$$

$$\therefore \boxed{\lambda = 0} \Rightarrow \underline{r}(s) - \underline{c} = \mu \underline{n} + \nu \underline{b}$$

ونضرب (6) في $k\underline{n}$ والتعويض في (5) نحصل على:

$$k\underline{n}(\underline{r}(s) - \underline{c}) = k\underline{n}(\mu \underline{n} + \nu \underline{b}) = -1$$

$$\Rightarrow k\mu = -1 \Rightarrow \mu = \frac{-1}{k} \Rightarrow \underline{r}(s) - \underline{c} = -\frac{1}{k}\underline{n} + \nu \underline{b}$$

لكن المتجه $\underline{r}(s) - \underline{c}$ يقع في المستوى اللاصق $\Leftarrow (\underline{r}(s) - \underline{c}) \cdot \underline{b} = 0$

$$\therefore \left(-\frac{1}{k}\underline{n} + \nu \underline{b}\right)\underline{b} = 0 \Rightarrow \nu = 0$$

$$\therefore \underline{r}(s) - \underline{c} = -\frac{1}{k}\underline{n} \qquad (7)$$

بتربيع (7) نحصل على

$$(\underline{r}(s) - \underline{c})^2 = \frac{1}{k^2}$$

ولكن

$$(\underline{r}(s) - \underline{c})^2 = \rho^2$$

$$\therefore \boxed{\rho = \frac{1}{k}}$$

(نصف قطر دائرة الإنحناء)

ومن 7 نحصل على

$$\boxed{\underline{c} = \underline{r}(s) - \frac{1}{k}\underline{n}}$$

(مركز دائرة الانحناء)

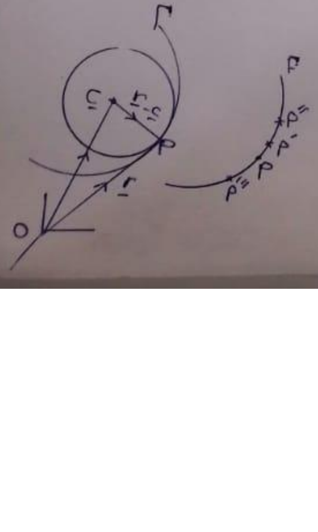
كرة الإنحناء لمنحنى الفراغ

تعرف كرة الانحناء S لمنحنى فراغ Γ عند نقطة عليه P بأنها أقرب كرة للمنحنى Γ عند P

ومن المعلوم أن أي كرة تتحدد تحديداً كاملاً بمعلومية أربع نقط واقعة عليها وليست واقعة في مستوى واحد . فاذا كان منحنى الفراغ مستوى فانه لا يمكن أن تكون له كرة انحناء ولذلك نفرض أن منحنى الفراغ غير مستوى (وبالتالي فان $\tau \neq 0$) فاذا تحقق هذا الشرط نعتبر على المنحنى Γ ثلاث نقط P', P'', P''' خلاف النقطة P فتكون كرة الانحناء للمنحنى Γ عند P (وهي أقرب كرة للمنحنى Γ عند P) هي الوضع النهائي للكرة المارة بالنقط P, P', P'', P''' عندما تقترب P', P'', P''' من P أي عندما

$$P' \to P, \quad P'' \to P, \quad P''' \to P$$

وهذا معناه أن هناك تماس (إلتصاق) من الرتبة الثالثة عند P



ليكن $\underline{r}$ معطى بدلالة التمثيل الطبيعي اي على الصورة ① $\underline{r} = \underline{r}(s)$

وليكن $\underline{c}$ هو مركز كرة الانحناء و R هو نصف قطرها

$$\therefore (\underline{r} - \underline{c})^2 = R^2 \quad ②$$

وبالتعويض من ① في ②

$$\therefore (\underline{r}(s) - \underline{c})^2 = R^2$$

$$\therefore F(s) = (\underline{r}(s) - \underline{c})^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

وحيث ان هناك تماس (التقاء من الرتبة الثالثة إذن $F'(s), F''(s), F'''(s)$ كل منهم يساوي صفر عند النقطة P

$$\therefore F'(s) = 0 \Rightarrow (\underline{r}(s) - \underline{c})\,\underline{t} = 0 \quad (4)$$

$$F''(s) = 0 \Rightarrow (\underline{r}(s) - \underline{c})\,\dot{\underline{t}} + \underline{t}^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\underline{r}(s) - \underline{c})\,k\underline{n} = -1 \xRightarrow[\text{في } \underline{n}]{\text{بالضرب}} \left((\underline{r}(s) - \underline{c})k = -\underline{n} \quad (*) \right)$$

$$\Rightarrow (\underline{r}(s) - \underline{c})\,\underline{n} = -\rho \quad (5) \quad , \left(\rho = \frac{1}{k}\right)$$

$$F'''(s) = 0 \Rightarrow \cancel{(\underline{r}(s) - \underline{c})\,\underline{n}\cdot\underline{t}}^{\,0} + (\underline{r}(s) - \underline{c})(\tau \underline{b} - k\underline{t}) = -\dot{\rho}$$

$$\therefore (\underline{r}(s) - \underline{c})\tau\underline{b} - \cancel{k(\underline{r}(s) - \underline{c})}^{\,\underline{n}\ (\text{من } *)}\,\underline{t} = -\dot{\rho}$$

$$\therefore (\underline{r}(s) - \underline{c})\tau\underline{b} - \underline{n}\cdot\underline{t} = -\dot{\rho}$$

$$\therefore (\underline{r}(s) - \underline{c})\,\underline{b} = -\dot{\rho}\sigma \quad (6) \left(\sigma = \frac{1}{\tau}\right)$$

نفرض ان $(\underline{r}(s) - \underline{c}) = \alpha\underline{t} + \beta\underline{n} + \gamma\underline{b}$ $**$

بضرب $**$ في $\underline{t}$ والتعويض من (4)

$$\therefore 0 = (\underline{r}(s) - \underline{c})\underline{t} = (\alpha\underline{t} + \beta\underline{n} + \gamma\underline{b})\underline{t} = \alpha$$

$$\therefore \boxed{\alpha = 0} \Rightarrow \underline{r}(s) - \underline{c} = \beta\underline{n} + \gamma\underline{b}$$

بضرب $**$ في $\underline{n}$ والتعويض من (5)

$$\therefore -\rho = (\underline{r}(s) - \underline{c})\underline{n} = (\beta\underline{n} + \gamma\underline{b})\underline{n} = \beta$$

$$\therefore \boxed{\beta = -\rho} \Rightarrow \underline{r}(s) - \underline{c} = -\rho\underline{n} + \gamma\underline{b}$$

بضرب $(**)$ في $\underline{b}$ والتعويض من 6

$$\therefore -\dot{\rho}\sigma = (-\rho\underline{n} + \gamma\underline{b})\underline{b} = (-\rho\underline{n} + \gamma\underline{b})\underline{b} = \gamma$$

$$\therefore \boxed{\gamma = -\dot{\rho}\sigma}$$

$$\therefore \underline{r}(s) - \underline{c} = -\rho\underline{n} - \dot{\rho}\sigma\underline{b}$$

$$\therefore \underline{c} = \underline{r}(s) + \rho\underline{n} + \dot{\rho}\sigma\underline{b} \quad , \quad R^2 = (\underline{r}(s) - \underline{c})^2 \Rightarrow R = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2\sigma^2}$$

مركز كرة الانحناء ← $\underline{c}$ ، نصف قطر كرة الانحناء ← R

المحل الهندسي لمركز الانحناء الكروي

نعتبر منحنى فراغي Γ

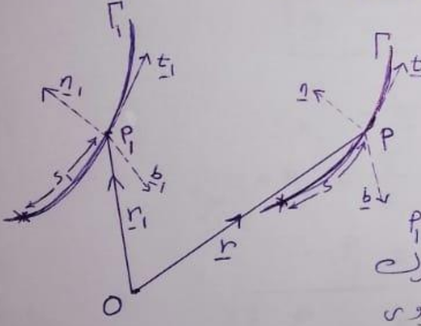
$$\underline{r} = \underline{r}(s) \qquad (1)$$

مركز الانحناء الكروي (مركز نصف كرة الانحناء) للمنحنى Γ عند النقطة $\underline{r}$ المعطاه بالمعادلة (1) هو كما سبق أن بينا :-

$$\underline{r}_1 = \underline{r} + \rho\,\underline{n} + \sigma\,\dot{\rho}\,\underline{b} \qquad (2)$$

(حيث $\rho = \frac{1}{k}$ ، $\sigma = \frac{1}{\tau}$ ؛ τ ، k هما الانحناء واللي للمنحنى Γ عند النقطة $\underline{r}$ وليس ρ نصف قطر الانحناء وليس σ نصف قطر اللي)

الطرف الأيمن من المعادلة (2) داله في s وكلما تحركت النقطة P التي متجه الوضع لها هو $\underline{r}$ تغير $\underline{r}_1$ أي قيمة الموضع لمركز الانحناء الكروي ومعنى هذا أنه اذا تحركت P على المنحنى Γ تحرك مركز الانحناء $\underline{r}_1$ على منحنى مناظر و لنرمز له بالرمز Γ_1 هذا المنحنى هو ما نسميه "المحل الهندسي لمركز الانحناء الكروي"



اذا كان s ، $\underline{b}$ ، $\underline{n}$ ، $\underline{t}$ ، τ ، k هم الانحناء واللي والثلاثي المتحرك والبارمتر الطبيعي للمنحنى Γ عند النقطة P وكان s_1 ، $\underline{b}_1$ ، $\underline{n}_1$ ، $\underline{t}_1$ ، τ_1 ، k_1 هم الانحناء واللي والثلاثي المتحرك والبارامتر الطبيعي للمنحنى Γ_1 عند النقطة P_1

<u>المطلوب</u> إيجاد الانحناء واللي والثلاثي المتحرك للمحل الهندسي لمركز الانحناء الكروي

نتفاضل (2) بالنسبة الى s (وباستخدام سيريه - فرينيه وأيضا ملاحظة أن $k = \frac{1}{\rho}$ ، $\tau = \frac{1}{\sigma}$)

$$\therefore \frac{d\underline{r}_1}{ds} = \dot{\underline{r}} + \rho\dot{\underline{n}} + \dot{\rho}\,\underline{n} + \sigma\dot{\rho}\,\dot{\underline{b}} + (\sigma\dot{\rho})^{\cdot}\,\underline{b}$$

$$= \underline{t} + \rho(\tau\underline{b} - k\underline{t}) + \dot{\rho}\,\underline{n} - \sigma\dot{\rho}\,\tau\,\underline{n} + (\sigma\dot{\rho})^{\cdot}\,\underline{b}$$

$$= \cancel{\underline{t}} + \frac{\rho}{\sigma}\underline{b} - \cancel{\underline{t}} + \cancel{\dot{\rho}\,\underline{n}} - \cancel{\dot{\rho}\,\underline{n}} + (\sigma\dot{\rho})^{\cdot}\,\underline{b}$$

$$= \left[\frac{\rho}{\sigma} + (\sigma\dot{\rho})^{\cdot}\right]\underline{b}$$

ولكن الطرف الأيسر هو

$$\frac{d\underline{r}_1}{ds} = \frac{d\underline{r}_1}{ds_1}\,\frac{ds_1}{ds} = \underline{t}_1\,\dot{s}_1$$

$$\therefore \dot{s}_1\,\underline{t}_1 = \left[\frac{\rho}{\sigma} + (\sigma\dot{\rho})^{\cdot}\right]\underline{b} \qquad (3)$$

(3) معادله لطرفين متجهين فتكون الاتجاهات متساوية وكذلك المقادير وبذلك فإن

متجهي الوحدة ن الطرفية متوازيين أي أن

$$\underline{t}_1 \parallel \underline{b} \Rightarrow \underline{t}_1 = \pm \underline{b}$$

نختار الإشارة الموجبة

$$\therefore \boxed{\underline{t}_1 = \underline{b}} \qquad (4)$$

وبالتالي من (3) يتضح أيضاً أن

$$\boxed{\dot{s}_1 = \frac{\rho}{\sigma} + (\sigma \dot{\rho})^{\cdot}} \qquad (5)$$

وبتفاضل (4) بالنسبة الى s

$$\therefore \dot{s}_1 k_1 \underline{n}_1 = \frac{ds_1}{ds}\frac{d\underline{t}_1}{ds_1} = \boxed{\frac{d\underline{t}_1}{ds} = \frac{d\underline{b}}{ds}} = -\tau \underline{n}$$

$$\therefore \dot{s}_1 k_1 \underline{n}_1 = -\tau \underline{n}$$

$$\therefore \underline{n}_1 \parallel \underline{n} \Rightarrow \underline{n}_1 = \pm \underline{n}$$

سنختار الإشارة السالبة

$$\therefore \boxed{\underline{n}_1 = -\underline{n}} \qquad (6)$$

وبالتالي فإن

$$\dot{s}_1 k_1 = \tau$$

$$\frac{1}{\rho_1} = k_1 = \frac{\tau}{\dot{s}_1} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{\dot{s}_1} \Rightarrow \boxed{\frac{k_1}{\tau} = \frac{1}{\dot{s}_1}} \quad (\mathrm{I})$$

$$\therefore \rho_1 = \sigma \cdot \dot{s}_1 = \sigma\left[\frac{\rho}{\sigma} + (\sigma\dot{\rho})^{\cdot}\right]$$

$$\therefore \boxed{\rho_1 = \rho + \sigma(\sigma\dot{\rho})^{\cdot}} \qquad (7)$$

والآن نعين $\underline{b}_1$

$$\underline{b}_1 = \underline{t}_1 \wedge \underline{n}_1 = \underline{b} \wedge (-n) = \underline{t}$$

$$\therefore \boxed{\underline{b}_1 = \underline{t}} \qquad (8)$$

وللحصول على τ_1 نفاضل (8) بالنسبة الى

$$\dot{s}_1(-\tau_1 \underline{n}_1) = \frac{ds_1}{ds}\frac{d\underline{b}_1}{ds_1} = \boxed{\frac{d\underline{b}_1}{ds} = \frac{d\underline{t}}{ds}} = k\,\underline{n}$$

وحيث أن $\underline{n}_1 = -n$

$$\therefore \tau_1 = \frac{k}{\dot{s}_1} \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_1}{k} = \frac{1}{\dot{s}_1}} \quad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \dot{s}_1 \rho \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{\rho^2}{\sigma} + \rho(\sigma\dot{\rho})^{\cdot}} \qquad (9)$$

15

∴ للمنحنى Γ_1 (المحل الهندسي لمركز الانحناء الكروي) فان :

(i) t_1, n_1, b_1 تتعين من المعادلات (4), (6), (8)

(ii) الانحناء والالتواء $\frac{1}{\sigma_1}$ و $\frac{1}{\rho_1}$ تتعينان من المعادلتين (9), (7)

(iii) المعادلات (I), (II) تؤدي الى أن (III) $\frac{k}{\tau} = \frac{\tau_1}{k_1}$

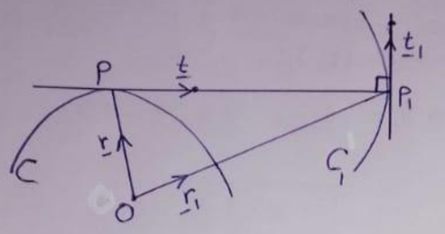
فاذا كانت $\frac{k}{\tau}$ = ثابت اى المنحنى Γ حلزوني فان المنحنى Γ_1 حلزوني أيضا واذا كانت زاوية الحلزونية للمنحنى Γ هي α أي أن $\frac{k}{\tau} = \tan\alpha$

فان زاوية الحلزونية للمنحنى Γ_1 هي $\frac{\pi}{2} - \alpha$ وذلك لأن

$$\frac{k_1}{\tau_1} = \frac{1}{\frac{k}{\tau}} = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Involute الناشر

نعتبر منحنى C أى منحنى C_1 يرتبط بالمنحنى C بعلاقة مؤداها أن المماسات للمنحنى C أعمدة على المنحنى C_1 نسميه "ناشر"



استنتاج معادلة المنحنى الناشر C_1 لمنحنى معطى C:

ليكن $\underline{r}$ متجه الموضع لنقطة P واقعة على منحنى معلوم C وليكن $\underline{r}_1$ متجه الموضع للنقطة P_1 على منحنى C_1 ناشر للمنحنى C أى أن المماس للمنحنى C عند النقطة P عمودى على المماس للمنحنى C_1 عند النقطة P_1 (أى أن $\underline{t} \perp t_1$ حيث $\underline{t}_1, \underline{t}$ متجهى وحدة المماس عند كل من P, P_1). ولنفرض أن معادلة C هى

$$\underline{r} = \underline{r}(s) \qquad (1)$$

كما هو موضح بالرسم فإن

$$\overline{OP_1} = \overline{OP} + \overline{PP_1}$$

$$\therefore \underline{r}_1 = \underline{r} + \lambda \underline{t} \qquad (\lambda \text{ كمية قياسية}) \qquad (2)$$

بتفاضل (2) بالنسبة الى s

$$\therefore \frac{dr_1}{ds} = \frac{d\underline{r}}{ds} + \lambda \dot{\underline{t}} + \dot{\lambda} t \Rightarrow \frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = t + \lambda \dot{\underline{t}} + \dot{\lambda} t$$

$$\Rightarrow \dot{s}_1 \underline{t}_1 = t + \lambda k \underline{n} + \dot{\lambda} t \qquad (3)$$

بضرب طرفى (3) فى $\underline{t}$ (وملاحظة أن $\underline{t} \perp t_1$ اذاً $\underline{t} \cdot \underline{t}_1 = 0$)

$$\therefore 0 = \cancel{t^2}^{\,1} + \lambda k \cancel{\underline{n} \cdot \underline{t}}^{\,0} + \dot{\lambda} \cancel{t^2}^{\,1}$$

$$\therefore \dot{\lambda} = -1$$

$$\therefore \frac{d\lambda}{ds} = -1 \Rightarrow \int d\lambda = \int -ds + c \qquad (c \text{ ثابت})$$

$$\therefore \lambda = (c - s) \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) فى (2) نحصل على معادلة الناشر وهى :-

$$\boxed{\underline{r}_1 = \underline{r} + (c-s)t \qquad c \text{ ثابت إختيارى}} \qquad (5)$$

وحيث أن c ثابت إختيارى فإننا نستنتج أن للمنحنى C عدد لانهائى من النواشر

استنتاج الثلاثي المتحرك $\underline{b}_1, \underline{n}_1, \underline{t}_1$ والانحناء واللي k_1, τ_1 للناشر :

بتفاضل (5) بالنسبة الى s وملاحظة ان $\frac{dr_1}{ds} = \frac{dr_1}{ds_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} = \underline{t}_1 \dot{s}_1$ نحصل على

$$\underline{t}_1 \dot{s}_1 = \cancel{\underline{t}} + (c-s)k\underline{n} + \cancel{\underline{t}(-1)}$$

$$\therefore \dot{s}_1 \underline{t}_1 = k(c-s)\underline{n} \qquad (6)$$

وحيث ان $\underline{n}, \underline{t}_1$ وحدات اتجاهية فاننا نستنتج من (6) أن :

(i) $\underline{t}_1 \parallel \underline{n} \Rightarrow \underline{t}_1 = \pm \underline{n}$

سنختار الاشارة الموجبة اى ان

$$\boxed{\underline{t}_1 = \underline{n}} \qquad (7)$$

(ii) $$\dot{s}_1 = k(c-s) \qquad (8)$$

بتفاضل (7) بالنسبة الى s نجد ان

$$k_1 \underline{n}_1 \cdot \dot{s}_1 = \tau \underline{b} - k\underline{t}$$

سنكتب الطرف الايمن فى صورة مقدار قياسى مضروباً فى وحدة اتجاهية اى على الصورة

$$k_1 \underline{n}_1 \dot{s}_1 = \sqrt{\tau^2 + k^2} \; \frac{\tau \underline{b} - k\underline{t}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$$

ومن ذلك نستنتج ان :-

(i) $\underline{n}_1 \parallel \frac{\tau \underline{b} - k\underline{t}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} \Rightarrow \underline{n}_1 = \pm \frac{\tau \underline{b} - k\underline{t}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$

وسنختار الاشارة الموجبة وبالتالى فان

$$\boxed{\underline{n}_1 = \frac{\tau \underline{b} - k\underline{t}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}} \qquad (9)$$

(ii) $k_1 \dot{s}_1 = \sqrt{\tau^2 + k^2}$

$$\therefore k_1 = \frac{\sqrt{\tau^2 + k^2}}{\dot{s}_1}$$

وبالتعويض عن $\dot{s}_1$ من (8) :

$$\therefore \boxed{k_1 = \frac{\sqrt{\tau^2 + k^2}}{k(c-s)}} \qquad (10)$$

من (7) ، (9) نعين $\underline{b}_1$

$$\underline{b}_1 = \underline{t}_1 \wedge \underline{n}_1 = \underline{n} \wedge \frac{\tau \underline{b} - k\underline{t}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}\left(\tau(\underline{n} \wedge \underline{b}) - k(\underline{n} \wedge \underline{t})\right)$$

$$\therefore \boxed{\underline{b}_1 = \frac{\tau \underline{t} + k\underline{b}}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}} \qquad (11)$$

لم يتبق سوى تعيين τ_1 ومن أجل تفاضل (11) بالنسبة الى s

$$\therefore -\tau_1 \underline{n}_1 \dot{s}_1 = \frac{d}{ds}\frac{\tau\underline{t}+k\underline{b}}{\sqrt{\tau^2+k^2}} = \frac{1}{(\tau^2+k^2)}\left(\sqrt{\tau^2+k^2}\,(\tau\underline{t}+k\underline{b})^{\cdot} - (\tau\underline{t}+k\underline{b})\left(\sqrt{\tau^2+k^2}\right)^{\cdot}\right)$$

$$\therefore -\tau_1 \underline{n}_1 \dot{s}_1 = \frac{1}{\tau^2+k^2}\left\{\sqrt{\tau^2+k^2}\left[\cancel{\tau k\underline{n}} + \dot{\tau}\underline{t} - \cancel{k\tau\underline{n}} + \dot{k}\underline{b}\right] - (\tau\underline{t}+k\underline{b})\frac{\tau\dot{\tau}+k\dot{k}}{\sqrt{\tau^2+k^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(\tau^2+k^2)^{3/2}}\left\{(\tau^2+k^2)(\dot{\tau}\underline{t}+\dot{k}\underline{b}) - (\tau\underline{t}+k\underline{b})(\tau\dot{\tau}+k\dot{k})\right\}$$

$$= \frac{1}{(\tau^2+k^2)^{3/2}}\left\{\cancel{\tau^2\dot{\tau}\underline{t}} + \tau^2\dot{k}\underline{b} + k^2\dot{\tau}\underline{t} + \cancel{k^2\dot{k}\underline{b}} - \cancel{\tau^2\dot{\tau}\underline{t}} - \tau k\dot{k}\underline{t} - k\tau\dot{\tau}\underline{b} - \cancel{k^2\dot{k}\underline{b}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(\tau^2+k^2)^{3/2}}\left\{(k^2\dot{\tau} - \tau k\dot{k})\underline{t} + (\tau^2\dot{k} - k\tau\dot{\tau})\underline{b}\right\}$$

$$= \frac{1}{(\tau^2+k^2)^{3/2}}\left[k(k\dot{\tau} - \tau\dot{k})\underline{t} + \tau(\tau\dot{k} - k\dot{\tau})\underline{b}\right]$$

$$= \frac{1}{(\tau^2+k^2)^{3/2}}(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau)(k\underline{t} - \tau\underline{b})$$

وبالتعويض عن $\underline{n}_1$ من (9)

$$\therefore -\tau_1 \dot{s}_1 \frac{(\tau\underline{b} - k\underline{t})}{\sqrt{\tau^2+k^2}} = \frac{1}{(\tau^2+k^2)^{3/2}}(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau)(k\underline{t} - \tau\underline{b})$$

$$\therefore \tau_1 \dot{s}_1 = \frac{1}{\tau^2+k^2}(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau) = \frac{1}{\left(1+\frac{k^2}{\tau^2}\right)}\,\frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{\tau^2}$$

ولكن $\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\tau}\right) = \frac{\tau\dot{k} - k\dot{\tau}}{\tau^2}$

$$\therefore \tau_1 \dot{s}_1 = -\frac{1}{1+\left(\frac{k}{\tau}\right)^2}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\tau}\right)$$

وبالتعويض عن $\dot{s}$ من (8)

$$\therefore \boxed{\tau_1 = -\frac{1}{k(c-s)\left(1+\left(\frac{k}{\tau}\right)^2\right)}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\tau}\right)} \qquad (12)$$

المعادلات (11)،(9)،(7) تعطينا $\underline{t}_1, \underline{n}_1, \underline{b}_1$

والمعادلات (12)،(10) تعطينا k_1, τ_1

ويلاحظ أنه اذا كان C منحنى حلزوني اى أن $\frac{k}{\tau}=$ ثابت فإن $\frac{d}{ds}\frac{k}{\tau} = 0$ وبالتالى فإن $\tau_1 = 0$

وكما سبق فإن انعدام التى يعنى أن المنحنى يقع بأكمله فى مستوى وبذلك نكون قد توصلنا الى النظرية الآتية :—

الشرط الضرورى واللازم لكى يكون المنحنى المباشر C_1 (للمنحنى معلوم C) هو منحنى مستوى أن يكون المنحنى C حلزونى.