# <u>محاضرة في التقدير بفترة</u>

## <u>ثانيا : التقدير بالفترة</u> Interval Estimation

بعد أن تعرفنا على التقدير بقيمة واحدة وطرقه المختلفة لأي بارامتر $\theta$ في مجموعة عامة معطاة، نلاحظ أن هذا النوع من التقدير يفتقر إلى الصلاحية التامة. بمعنى أنه لا يوجد ما يضمن لنا أن التقدير $\hat{\theta}$ يتفق مع القيمة الفعلية المجهولة للبارامتر المطلوب تقديره إحصائيا $\theta$. ولكي نصل إلى درجة كبيرة من الصلاحية في تقدير أي بارامتر مجهول $\theta$ يمكن الاستعانة بتوزيع المعاينة للتقدير $\hat{\theta}$ لهذا البارامتر. فمن خلال توزيع المعاينة للتقدير $\hat{\theta}$ يمكن أن نؤكد احتواء فترة معينة $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$ على قيمة البارامتر المجهول $\theta$ باحتمال مناظر $1-\alpha$

$$P\left(\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\right)=1-\alpha \quad *$$

حيث $0<\alpha<1$ ، $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ هي قيم للتقدير $\hat{\theta}$ كمتغير عشوائي.

وبمعنى أخر لكي يبلغ التقدير $\hat{\theta}$ أقصى درجة من الصلاحية في تقديره للبارامتر $\theta$ يمكننا تحديد القيمة $e>0$ لكل مقدار متناهي في الصغر $\alpha>0$
بحيث أن

$$P\left(\left|\theta-\hat{\theta}\right|<e\right)=p\left(\hat{\theta}-e<\theta<\hat{\theta}+e\right)=1-\alpha \quad **$$

وبقدر ما تكون القيمة $\alpha$ متناهية في الصفر تكون القيمة $e$ كذلك بقدر ما يكون التقدير $\hat{\theta}$ غاية في الدقة للبارامتر المجهول $\theta$.

وبذلك نحصل على نوع أخر من التقديرات الإحصائية - هذا النوع من التقديرات يختلف عن التقدير بقيمة واحدة في كونه محدد بقيمتين وليس بقيمة واحدة.

هاتان القيمتان تحويان بينهما على القيمة الفعلية للبارامتر المجهول $\theta$ بقيمة احتمالية مناظرة تساوى $1-\alpha$

### <u>تعريف 2.9 :</u>

**فترة الثقة Confidence Interval**

فترات التقدير $\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)$، $\left(\hat{\theta}-e,\hat{\theta}+e\right)$ والتي تشمل داخلها قيمة للبارامتر المجهول $\theta$ بقيمة احتمالية $1-\alpha$ تسمى فترة الثقة.

**<u>تعريف 2.10 :</u>**

**مستوى الثقة Confidence Level**

القيمة الاحتمالية $1-\alpha$ تسمى مستوى الثقة أو درجة الثقة وقيمتها تكون قريبة من الواحد الصحيح 0.9 أو 0.95 أو 0.99

وأحيانا يعبر عنها من خلال النسب المئوية $(1-\alpha)\%$ مثل 90% أو 95% أو 99%.

**<u>تعريف 2.11 :</u>**

القيمة الموجبة $e$ تسمى دقة التقدير ونهايتي فترة الثقة $\hat{\theta}+e$ , $\hat{\theta}-e$ تسمى حدود فترة الثقة. وجدير بالذكر أن العلاقات الاحتمالية السابقة (*) ، (**) تعنى احتمال أن تشمل حدود فترة الثقة على قيمة البارامتر وليس احتمال انتماء البارامتر إلى حدود فترة الثقة، حيث أن حدود فترات الثقة هي الحدود المتغيرة باعتبارها قيم التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ بينما البارامتر $\theta$ غير معلوم القيمة. ونحاول الآن التعرف على فترات الثقة لبعض البارامترات الخاصة بالمجموعات العامة المعطاة خاصة المجموعات العامة ذات التوزيع المعتدل.

**<u>فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ لمجموعة بالتوزيع المعتدل :</u>**

اعتبر مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل بالبارامتر $\mu$ (المتوسط العام)، $\sigma^2$ (التباين العام) ومن هذه المجموعة اختبرت عينة عشوائية حجمها $n$ ومفرداتها هي $x_1,x_2,\dots,x_n$

للحصول على فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ نعتبر الحالتين الآتيتين

**<u>الحالة الأولى :</u>**

إذا كان التباين $\sigma^2$ معلوم

**<u>نظرية 2.1 :</u>**

إذا كان $\bar{x}$ هو متوسط عينة عشوائية حجمها $n$ من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل معلومة التباين $\sigma^2$ فإن فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ هي

$$\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**مثال 2.9 :**

من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل انحرافها المعياري $\sigma = 3$ اختيرت عينة عشوائية حجمها $n = 36$ فإذا كان متوسط العينة $\bar{x} = 16.5$. أوجد حدود فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ عند متوسط الثقة $1-\alpha = 0.95$

**الحل :**

من الجداول الإحصائية بمعلومية مستوى الثقة $1-\alpha = 0.95$

نجد أن

$$\phi\left(z_{\alpha/2}\right) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$$

أي أن

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

بالتعويض في حدود فترة الثقة للمتوسط العام نحصل على

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \frac{3}{\sqrt{36}} 1.96 = \frac{1.96}{2} = 0.98$$

ومن ثم فإن

$$16.5 - 0.98 \leq \mu \leq 16.5 + 0.98$$

أي

$$15.52 \leq \mu \leq 17.48$$

وهذه هي فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ للمجموعة المعطاة وذلك عند مستوى الثقة $1-\alpha = 0.95$

**مثال 2.10 :**

مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل انحرافها المعياري $\sigma = 0.3$ - أوجد قل حجم للعينة العشوائية $n$ يمكن اختيارها من هذه المجموعة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير المتوسط القيمة 0.08 وذلك عند مستوى الثقة $1-\alpha = 0.90$

**الحل :**

عند مستوى الثقة $0.90$ معامل الثقة $z_{\alpha/2} = 1.645$ وأقل حجم للعينة $n$ يحقق المتباينة

$$n \le \left( \frac{0.3}{0.08} 1.645 \right)^2 = 37.9$$

وبذلك يكون حجم العينة الذي يضمن دقة التقدير هو $n = 37$

**<u>الحالة الثانية :</u>**

إذا كان التباين $\sigma^2$ غير معلوم

في هذه الحالة عندما يكون تباين المجموعة بالتوزيع المعتدل $\sigma^2$ غير معلوم ، من الواضح أنه لا يمكن الاستعانة بحدود فترة الثقة السابقة التقدير المتوسط العام $\mu$ حيث أن هذه الحدود تعتمد على معلومية $\sigma^2$ ولمعالجة هذه المشكلة لابد لنا من التوصل إلى تقرير لهذا البارامتر المجهول $\sigma^2$ وهذا بدوره يقودنا إلى مناقشة العينات العشوائية الكبيرة $(n \ge 30)$ والعينات العشوائية الصغيرة $(n < 30)$فإذا كان حجم العينة العشوائية $n$ بحيث $(n \ge 30)$ عندئذ يمكن الاستعانة بتباين العينة $S^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ كتقدير للتباين المجهول $\sigma^2$ ويلاحظ في هذه الحالة أن توزيع المعاينة للإحصائية $\dfrac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$

يقترب من التوزيع المعتدل القياسي ومن ثم تصبح فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ هي

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \le \mu \le \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$$

وذلك عند مستوى الثقة $1-\alpha$ - وهى نفس الفترة السابقة بعد إحلال انحراف العينة $S$ محل القيمة الغير معلومة $\sigma$ أما إذا كان حجم العينة العشوائية $n$ بحيث $n < 30$ في هذه الحالة نلاحظ أن توزيع المعاينة للإحصائية

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{n}$$

هي توزيع ستودنت بدرجات الحرية $n-1$ نظرية $1.11$ وفترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ في هذه الحالة تعطى طبقا للنظرية الآتية :

**<u>نظرية 2.2 :</u>**

إذا كان $\bar{x}$ ، $S^2$ هي قيم المتوسط والتباين لعينة عشوائية حجمها $n$ من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل غير معلومة التباين $\sigma^2$ فإن فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ هي

$$\bar{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,n-1}\le\mu\le\bar{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,n-1}$$

حيث $t_{\alpha/2,n-1}$ هي معامل الثقة المناظر لمستوى الثقة $1-\alpha$ ودرجات الحرية $n-1$

## مثال 2.11 :

القراءات الآتية :

1.2 , 1.7,1.5 , 1.4 ,1.9 ,1.12

تمثل عينة عشوائية من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل . أوجد حدود فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ عند مستوى الثقة 0.99

## الحل :

نوجد أولا متوسط وتباين العينة

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=1.47,$$

$$S=0.296,\quad S^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}=0.0878$$

عند مستوى الثقة $1-\alpha=0.99$

$\alpha=0.01$ ، $\alpha/2=0.005$ ومن الجداول الإحصائية $IV$

نجد أن

$$t_{0.05,5}=4.032$$

ومن ثم فإن

$$\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2,n-1}=\frac{0.296}{\sqrt{\sigma}}4.032=0.487$$

وتصبح فترة الثقة للمتوسط العام هى

$$1.47-0.487 \le \mu \le 1.47+0.487$$

أى

$$0.983 \le \mu \le 1.954$$

وذلك عند مستوى الثقة

$$1-\alpha = 0.99$$

## فترة الثقة للفرق بين متوسطين :

اعتبر مجموعتين بالتوزيع المعتدل، المجموعة الأولى بالبارامترات $\mu_1$ ، $\sigma_1^2$ المجموعة الثانية بالبارامترات $\mu_2$ ، $\sigma_2^2$. والمطلوب هو الحصول على فترة الثقة للفرق بين المتوسطين $\mu_1$ ، $\mu_2$ أى الفرق $\mu_1-\mu_2$ أو $\mu_2-\mu_1$ وذلك عند مستوى الثقة $1-\alpha$

نختار من هاتين المجموعتين عينتين مستقلتين حجومهما على الترتيب $n_1$ ، $n_2$ ونفرض أن $\bar{x}_1$ ، $S_1^2$ ، $\bar{x}_2$ ، $S_2^2$ هي قيم المتوسطات والتباينات لهاتين العينتين من المجموعتين الأولى والثانية على الترتيب.

ونلاحظ هنا أن كل من $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ وكذلك $S_1^2$ ، $S_2^2$ تمثل متغيرات عشوائية مستقلة نظرا لاستقلال العينتين.

للحصول على فترة الثقة للفرق بين المتوسطين $\mu_1-\mu_2$

نتبع نفس الحالات التي نوقشت في فترة الثقة للمتوسط العام $\mu$ أي عندما تكون التباينات $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ بارامترات معلومة بصرف النظر عن كون العينات كبيرة $n_1, n_2 \ge 30$ أم عينات صغيرة وكذلك عندما تكون هذه البارامترات مجهولة.

### الحالة الأولى :

إذا كانت التباينات $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ معلومة.

### نظرية 2.3 :

إذا كانت $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ هي قيم المتوسطات لعينتين مستقلتين حجومها $n_1$ ، $n_2$ من مجموعتين بالتوزيع المعتدل معلومتين التباينات $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ على الترتيب فإن فترة الثقة للفرق بين المتوسطين $\mu_1-\mu_2$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ هي :

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)-z_{\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right)}\le \mu_1-\mu_2$$
$$\le\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)+z_{\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right)}$$

حيث $z_{\alpha/2}$ هي معامل الثقة المناظر لمستوى الثقة $1-\alpha$

**<u>مثال 2.12 :</u>**

أوجد فترة الثقة للفرق الفعلي بين الأعمار الزمنية لنوعين من اللمبات الكهربائية عند مستوى الثقة $1-\alpha=0.96$ إذا علم أن متوسط العمر الزمني لعدد 40 لمبة من النوع الأول هو 428 ساعة ومتوسط العمر الزمني لعدد 50 لمبة من النوع الثاني هو 415 ساعة وبفرض أن الأعمار الزمنية لكل النوعين تخضع للتوزيع المعتدل بالبارامترات $\sigma_1^2=192$ ، $\sigma_2^2=210$ على الترتيب.

**<u>الحل :</u>**

من الجداول الإحصائية $III$ وعند مستوى الثقة $1-\alpha=0.96$

نجد أن

$$\phi\left(z_{\alpha/2}\right)=\frac{0.96}{2}=0.48$$

أي أن

$$z_{\alpha/2}=2.55$$

ومن ثم فإن :

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=2.55\ \sqrt{\frac{192}{40}+\frac{210}{50}}=\left(2.55\right)\left(3\right)=7.65,$$

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2=428-415=13$$

وتصبح حدود فترة الثقة للفرق $\mu_1-\mu_2$ هي

$$13+7.65$$

أي

$$5.35\le\mu_1-\mu_2\le 21.65$$

**<u>الحالة الثانية :</u>**

إذا كانت التباينات $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ بارامترات مجهولة في هذه الحالة إما أن تكون العينات العشوائية كبيرة $(n_1, n_2 \geq 30)$ وإما تكون العينات صغيرة $(n_1, n_2 - 2 < 30)$

إذا كانت العينات العشوائية كبيرة يمكن إحلال $S_1^2$ ، $S_2^2$محل $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ في حدود فترة الثقة في الحالة الأولى باعتبار هذه التقديرات غير متحيزة ونحصل مباشرة على فترة الثقة التالية

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} - \frac{S_2^2}{n_2}\right)}$$

أما إذا كانت العينات العشوائية صغيرة $(n_1 + n_2 - 2 \leq 30)$فنظرا لصعوبة هذه الحالة سنفترض أن التباينات المجهولة $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$متساوية أي أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ بارامترين مجهولين $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$

وهذا البارامتر المجهول $\sigma^2$ يمكن تقديره من خلال تباينات العينات $S_1^2$ ، $S_2^2$ ونستخدم الإحصائية الآتية

$$S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

يسمى بالتباين المشارك أو التقدير المشارك

ونلاحظ أن هذا التقدير تقدير غير متحيز للتباين $\sigma^2$ حيث أن

$$E\left(S_P^2\right) = E\left(\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$$

$$= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left((n_1 - 1)E\left(S_1^2\right) + (n_2 - 1)E\left(S_2^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left((n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2\right) = \sigma^2$$

## **<u>نظرية 2.4 :</u>**

إذا كانت $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ ، $S_1^2$ ، $S_2^2$ هي قيم المتوسطات والتباينات لعينتين مستقلتين حجومهما $n_1$ ، $n_2$ على الترتيب من مجموعتين بالتوزيع المعتدل مجهولتين ولكن متساويتان التباين $\sigma^2$ فإن فترة الثقة للفرق بين المتوسطات العامة $\mu_1 - \mu_2$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ هى

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2$$

$$\leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

**مثال 2.13 :**

اختيرتا عينتان مستقلتان حجومهما $n_1 = 8$ ، $n_2 = 8$ من مجموعتين بالتوزيع المعتدل متساويتين في التباين. إذا كان $\bar{x}_1 = 23$ ، $\bar{x}_2 = 19$ ، $S_1^2 = 3$ ، $S_2^2 = 5$ أوجد فترة الثقة للفرق بين المتوسطين $\mu_1 - \mu_2$ وذلك عند مستوى الثقة $1-\alpha = 0.95$

**الحل :**

من الجداول الإحصائية $IV$ عند مستوى الثقة $1-\alpha = 0.95$ نجد أن

$$t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} = t_{0.025,14} = 2.145$$

$$S_P^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2^{-2}} = \frac{50}{14} = 4 \,,$$

$$t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (2.145)(29)\sqrt{\frac{1}{4}} = 2.145$$

وتصبح فترة الثقة المطلوبة هى

$$(23-19) \mp 2.145$$

أي

$$1.855 \le \mu_1 - \mu_2 \le 6.145$$

فترة الثقة للتباين العام لمجموعة بالتوزيع المعتدل :

اعتبر مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل بالبارامترات $\mu$ ، $\sigma^2$ والمطلوب هو الحصول على فترة الثقة لتقدير التباين العام باعتباره بارامتر مجهول وذلك عند مستوى الثقة $1-\alpha$

**نظرية 1.5 :**

إذا كان $S^2$ هو تباين عينة عشوائية حجمها $n$ من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل. فإن فترة الثقة للتباين العام $\sigma^2$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ هي

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}$$

**مثال 2.14 :**

اختيرت عينة عشوائية حجمها $n:16$ من مجموعة عامة بالتوزيع المعتدل إذا كان تباين العينة $S^2=52$ أوجد فترة الثقة للتباين العام $\sigma^2$ والانحراف المعياري $\sigma$ عند مستوى الثقة $1-\alpha=0.90$

**الحل :**

عند مستوى الثقة $1-\alpha=0.90$ نلاحظ أن $\alpha=0.1$ ، $\alpha/2=0.05$ ومن الجداول الإحصائية $v$ لدرجات الحرية $n-1=15$ نجد أن $x^2_{0.05.15}=24.996$ ، $x^2_{0.95,15}=7.261$

ومن ثم فإن حدود فترة الثقة للتباين العام $\sigma^2$ هى

$$\frac{(15)(5,2)}{24.996}\le\sigma^2\le\frac{(15)(5.2)}{7.261}$$

أي

$$3.12\le\sigma^2\le10.74$$

بأخذ الجذر التربيعى نحصل على فترة الثقة للانحراف المعياري $\sigma$ على النحو التالي

$$1.766\le\sigma\le3.278$$

## فترة الثقة للنسبة بين التباينات :

اعتبر مجموعتين بالتوزيع المعتدل المجموعة الأولى تباينها $\sigma_1^2$ ، والمجموعة الثانية تباينها $\sigma_2^2$ والمطلوب هو الحصول على فترة الثقة للنسبة بين التباينات $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$.

نختار لذلك عينتين مستقلتين حجومها $n_1$ ، $n_2$ من هاتين المجموعتين. ونفرض أن $S_1^2$ تباين العينة الأولى، $S_2^2$ تباين العينة الثانية

**نظرية 2.6 :**

إذا كانت $S_1^2$ ، $S_2^2$ هي قيم التباينات لعينتين مستقلتين حجومهما $n_1$ ، $n_2$ من مجموعتين بالتوزيع

تبايناتهما $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ على الترتيب فإن فترة الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند مستوى الثقة $1-\alpha$ هي

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$$

**<u>مثال 2.15 :</u>**

اختيرت عينتان مستقلتان حجومهما $n_1 = 10$ ، $n_2 = 8$ من مجموعتين بالتوزيع المعتدل، إذا كان

$S_1^2 = 0.25$ ، $S_2^2 = 0.49$ أوجد فترة الثقة للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ عند مستوى الثقة $1-\alpha = 0.90$

**<u>الحل :</u>**

عند مستوى الثقة $1-\alpha = 0.90$ نلاحظ أن $\alpha = 0.1$ ، $\alpha = 0.05$ ومن الجداول الإحصائية $VI$

لدرجات الحرية $n_1 - 1 = 9$ ، $n_2 - 1 = 7$ نجد أن $F_{0.05,9,7} = 368$ ، $F_{0.05,7,9} = 329$ ومن ثم فإن

حدود فترة الثقة للنسبة بين التباين $\sigma_1^2$ إلى التباين $\sigma_2^2$ تعطى بالصورة الآتية

$$\frac{0.05}{0.49}\frac{}{3.68} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{0.25}{0.49}329$$

<u>أي أن</u> $0.198 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 679$

# <u>انتهت المحاضرة مع أطيب الامنيات بالتوفيق</u>