اسم المقرر: حسبان (1)

الفرقة: الاولى شعبة رياضيات (تعليم اساسى)

رقم المحاضرة: 6

استاذ المادة: د. هدير الجندى

الباب الثاني

المشتقات

(2. تعريف (1) : (مشتقة الدالة عند عدد a)

لتكن f داله معرفه على فتره مفتوحه تحتوي العدد a مشتقه f عند a ويرمز لها عادة بالرمز $f'(a)$ تعطى بالصيغه الآتيه بشرط أن النهاية موجودة :

$$(1) \cdots \boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

ملحوظات

(1) اذا كانت $f'(a)$ موجودة يقال أن f قابله للاشتقاق عند a أو قابله للتفاضل عند a. وقيمه المشتقه $f'(a)$

(2) في (1) يمكن وضع $x = a + h$ وبالتالي فإن (1) يمكن كتابتها على الصيغه

$$(2) \cdots f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعريف (2) (مشتقه الدالة) :-

اذا كانت f قابله للاشتقاق (للتفاضل) عند كل عدد x في فترة مفتوحة (a,b) [أو (a,∞) أو $(-\infty,a)$ أو $(-\infty,\infty)$] فيقال : قابله للتفاضل على هذه الفتره ---

أيضا لكل عدد x في هذه الفتره قيمه المشتقه هي $f'(x)$.

الداله f' تسمى مشتقه f وقيمه f' عند x تعطى بالصيغه الآتيه
بفرض أن النهايه موجوده

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \quad \ldots (1)$$

ملحوظه هامه :
$f'(x)$ تسمى المشتقه الأولى (المعامل التفاضلى الأول) للداله f عند x ويرمز لها أيضا بأحد الرموز الآتيه :

$$f'(x) = D_x[f(x)] = D_x[y] = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

مثال ١ : أوجد مشتقه الداله $\cancel{f(x) = x^2 - 8x + 9}$
العدد a

الحل :
حيث أن f كثيرة حدود فهي معرفة لأى عدد حقيقى x وبالتالى فإنها معرفه عند a ، $a+h$ اذن من التعريف (١) نحصل على

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{8a} - 8h + \cancel{9} - \cancel{a^2} + \cancel{8a} - \cancel{9}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) = 2a - 8$$

مثال: إذا كان $f(x)=\sqrt{x-5}$ أوجد مشتقة f . عين مجال f ومجال f'

الحل: مجال تعريف f هو قيم x حيث $x-5\geq 0$ أي أن $x\geq 5$

بالإضافة عندئذ أن عند x حيث $x\in[5,\infty)$ يكون ضمن التعريف (٢)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-5}-\sqrt{x-5}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-5}-\sqrt{x-5}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h-5}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+h-5}+\sqrt{x-5}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-5)-(x-5)}{h\left[\sqrt{x+h-5}+\sqrt{x-5}\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h-5}+\sqrt{x-5}}$$

أي أن

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}}=\frac{1}{2\sqrt{x-5}}$$

ومجال تعريف f' هو قيم x حيث $x-5>0$ أي أنه $x>5$ أو $(5,\infty)$ ومن الواقع أنه أصغر من مجال تعريف f .

مثال ٢: أوجد f' إذا كان $f(x)=\dfrac{1-x}{2+x}$

الحل: لأي عدد x حيث $x\neq -2$ يكون (من تعريف (٢))

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1-(x+h)}{2+x+h}-\frac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{[1-(x+h)](2+x)-(1-x)[(2+x)+h]}{(2+x)(2+x+h)h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1-x)(2+x)-h(2+x)-(1-x)(2+x)-h(1-x)}{(2+x)(2+x+h)h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h[2+x+1-x]}{h(2+x)(2+x+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x)(2+x+h)}$$

$$\frac{-3}{(2+x)^2}$$

تفسيرات للمشتقة

أولاً تفسير المشتقة لدالة عند نقطة يمثل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة :-

اذا كانت $f'(x)$ موجودة عند العدد a فإن المماس للمنحنى $f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم المار بالنقطة $(a, f(a))$ وميله يساوي $f'(a)$ وبالتالي فان معادلة المماس عند النقطة هي :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

ومعادلة العمودي على المماس عند هذه النقطة هي

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

مثال:

- أوجد معادلة المماس والعمودي على المنحنى

$y = x^2 - 8x + 9$ عند النقطة $(3, -6)$

الحل:

من المثال نعلم أن $f'(a) = 2a - 8$

إذن ميل المماس عند $a = 3$ هو $f'(3) = 6 - 8 = -2$

ومعادلته هي $y - (-6) = (-2)(x - 3)$

أو $y + 6 = -2x + 6$

أي أن $y = 2x$

أيضا معادلة العمودي عند هذه النقطة هي

$y - (-6) = \frac{-1}{-2}(x - 3)$ أو $y + 6 = \frac{1}{2}(x - 3)$

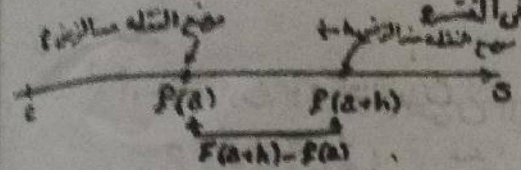
أي أن ...

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$$

ثانيا: تفسير المشتقة كمعدل التغير (السرعة)

لنفرض أن جزيء يتحرك على خط مستقيم تبعاً لمعادلة الحركة $s = f(t)$
حيث s بعد الجزيء عن نقطة البداية (عادة نقطة الأصل)
عند الزمن t . الدالة f عادة تسمى دالة الموضع للجزيء في
هذه الحالة في الفترة الزمنية من $t = a$ إلى $t = a + h$
التغير في الموضع يساوي $f(a+h) - f(a)$

السرعه المتوسطه للجزئ في الفترة الزمنية $[a , a+h]$ هي



$$\boxed{\text{السرعه المتوسطه} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

إذا كانت الفترة الزمنية $[a , a+h]$ صغيرة جداً جداً أي أن h قريب جداً من الصفر فانه عندما تقترب h من الصفر فإننا نعرف السرعه (أو السرعه اللحظيه) $v(a)$ عند الزمن $t=a$ لتكون نهاية السرعه المتوسطه أي أن

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

وهذا يعني هندسيا أن السرعه تساوي ميل المماس عند النقطه $(a, f(a))$ لمنحنى الموضع - الزمن.

القيمه المطلقه للسرعه $|v(t)|$ تسمى السرعه غير الموجهه للجزئ (speed)

مثال : موضع جزئ يعطى بمعادلة الحركه $f(t)=t^2-8t+9$ حيث t محسوبة بالثواني و s بالأمتار.

أوجد السرعه والسرعه غير الموجهه بعد 2 ثانية

الحل : من المثال (1) نعلم أن مشتقه داله الموضع هي

$f'(t)=2t-8$ إذن السرعه بعد 2 ثانيه

$$f'(2)=2(2)-8 = -4 \ m/s$$

(٥٩)

$|f'(2)| = |-4| = 4\ m/s$ والسرعة غير المتجهة هي

مثال أوجد الفترة التي تكون عليها الدالة $f(x) = |x|$ قابلة للتفاضل

الحل من تعريف دالة القياس نعلم أن

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

أولاً:

اذا كانت $x > 0$ فان $f(x) = |x| = x$

وباختيار h صغيرة جداً بحيث يكون $x + h > 0$ وبالتالي

$|x+h| = x+h$

فان

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 = f'(x)$$

وبالتالي فان f قابلة للتفاضل لجميع $x > 0$

ثانياً: اذا كانت $x < 0$ فان $f(x) = |x| = -x$

وباختيار h صغيرة جداً بحيث يكون $x + h < 0$ بالتالي

$|x+h| = -(x+h)$

فان

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1 = f'(x)$$

وبالتالي فان f قابلة للتفاضل لكل $x < 0$.

مثال: عندما $x=0$ فإن

$$f(0+h)=|h|=\begin{cases} h, & h>0 \\ -h, & h<0 \end{cases}$$

$$f(0)=|0|=0$$

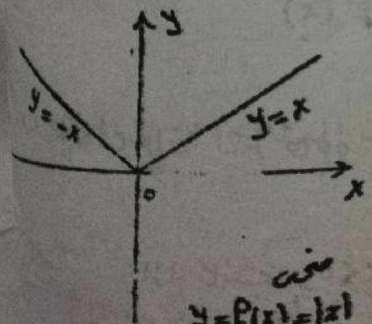
إذن

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}= \begin{cases} h>0: & \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1 \\ h<0: & \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1 \end{cases}$$

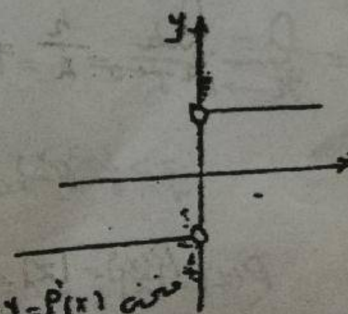
وعلى ذلك فإن المشتقة ليست موجودة عند $x=0$

ويمكن تعريف المشتقة على النحو التالي

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{if } x>0 \\ -1 & \text{if } x<0 \end{cases}$$



منحنى $y=f(x)=|x|$



منحنى $y=f'(x)$

نظرية ٢-١: اذا كانت f قابلة للتفاضل عند a فإن f متصلة عند a

البرهان: المطلوب اثبات أن

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

$$f(x) = f(a) + [f(x) - f(a)]$$

وبالتالى فإن

$$f(x) = f(a) + \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right](x-a) \quad , \quad x \neq a$$

إذن بأخذ النهايه عندما $x \to a$ وحيث أن $f'(a)$ موجودة فإن

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$= f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a)$$

ملحوظه

(١) العكس غير صحيح . من المثال السابق (٥-٤) نعلم أن الداله $f(x)=|x|$ متصله عند $x=0$. ولكن ليست قابلة للتفاضل عند $x=0$.

وهذا يعنى أن شرط الاتصال عند نقطه ليس كافياً لكى تكون الداله قابله للتفاضل عند هذه النقطه .

بصفه عامه اذا كان منحنى الداله معلوم فإن المماس للمنحنى غير متواجد عند النقاط $x = a, b, c, d$ فى الشكل المقابل حيث يوجد كورنر أو ناب .