هندسة فراغية الفرقة الثانية

شرط تقاطع المستقيمين

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1} \quad \& \quad \frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}$$

فى الفراغ، هو

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}=0$$

الباب الرابع
المستوى

المستوى فى الفراغ يمكن وصفه هندسياً بفرض نقطة Q عليه وبفرض معلومية إتجاه المستقيم " d " العمودى عليه. وبالتالى فإن النقطة P تقع فى المستوى إذا كان وفقط إذا كان PQ عمودى على المستقيم d.

الباب الرابع
المستوى

نظرية : (1-4)

المستوى R المار بالنقطة $Q(x_0, y_0, z_0)$ والعمودي على المستقيم d ذو النسب الإتجاهيه L, M, N له المعادلة

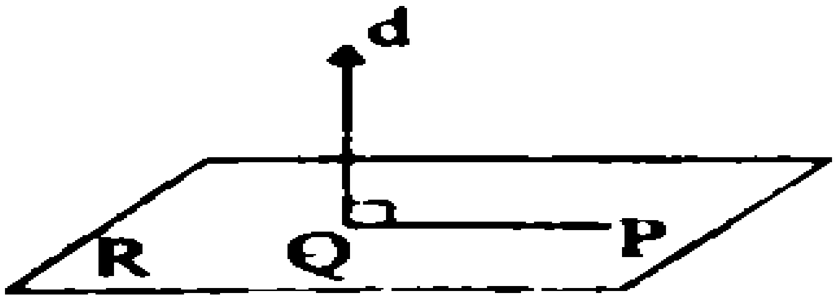
$$L(x - x_0) + M(y - y_0) + N(z - z_0) = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

الباب الرابع
المستوى

البرهان:

كما في الشكل 4-1، بفرض نقطة P (x,y,z) على R بأن QP عمودي على d ولكن شرط تعامد المستقيمين هو

$$L(x - x_0) + M(y - y_0) + N(z - z_0) = 0$$



شكل 4-1

الباب الرابع
المستوى

وحيث ان المعادله السابقه تتحقق باى نقطة P على المستـــوى R، إذن هى تمثل معادلة المستوى المطلوبة بدلالة نقطة عليه وبمعلومية نسب إتجاه العمودى عليه.

<u>ملحوظة:</u> المعادلة 4-1 يمكن كتابتها فى الصورة

$$Lx + My + Nz = Lx_0 + My_0 + Nz_0 \qquad (2-4)$$

نفـــرض أن $Lx_0 + My_0 + Nz_0 = D$ إذن المعادلـــــة (4-2) تســـــمى بالمعادلة العامة للمستوى أى أن أية معادلة من الدرجة الأولـــى فـــى x,y,z تمثل معادلة مستوى حيث معاملات x,y,z فى المعادلة تمثل مركبات المتجه العمودى على هذا المستوى.

الباب الرابع
المستوى

مثال(١):

أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $Q(1,5,-2)$ والعمودى عليه له النسب الإتجاهية $1, 2, -3$

الحل:

بالتعويض فى المعادلة $2-4$ فإن

$$x + 2y - 3z = D$$

ولكن النقطة $(1,5,-2)$ تقع على المستوى المطلوب، إذن تحقق معادلته وبالتالى فإن

$$1 + 2 \times 5 - 3 \times -2 = D \Rightarrow D = -17$$

وبالتالى فإن معادلة المستوى المطلوبة هى $x + 2y - 3z = 17$.

الباب الرابع
المستوى

معادلة المستوى المار بالثلاث نقط

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ & $P_2(x_2, y_2, z_2)$ & $P_3(x_3, y_3, z_3)$ يعطى

المعادلة

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

الباب الرابع
المستوى

بفك المحدد نحصل على المعادلة الآتية:-

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

الباب الرابع
المستوى

مثال (2):

أوجد معادلة المستوى الذى:

أ) يحتوى النقطة (1,2,3) ويكون نسب إتجاه المستقيم العمودى عليه هى 2,4,6

ب) يحتوى الثلاث نقاط (-5,4,6) & (-3,1,2) & (1,2,3)

الباب الرابع
المستوى

الحل:

أ) معادلة المستوى المطلوبة

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

أى أن

$$x + 2y + 3z = 14$$

ب) معادلة المستوى المطلوبة هي

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $-x + 10y - 8z + 3 = 0$

الباب الرابع
المستوى

معادلة المستوى بدلالة الأجزاء التي يقطعها من محاور الإحداثيات.

حيث الأجزاء المقطوعة **a, b, c من محاور الإحداثيات Ox, Oy, Oz على الترتيب يكون له المعادلة**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \qquad (3-4)$$

وهذه لمعادلة (3-4) تمسى بمعادلة المستوى فى صورة المقاطع

الباب الرابع
المستوى

مثال:

أوجد أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات للمستوى

$$x + 3y - 4z = 12$$

الحل:

بقسمة طرفي المعادلة 12 نحصل على

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-3} = 1$$

إذن أطوال المقاطع هي 12, 4,-3 وذلك بالمقارنة بالمعادلة (4-3).

الباب الرابع
المستوى

نظرية (4−4):

أى مستوى يقسم الفراغ R^3 إلى قسمين يقعان على جانبى المستوى

مثال:

بين ما إذا كانت النقط $(1,1,2)$ & $(1,-1,3)$ & $(2,3,4)$ تقع فى جهة واحدة من المستوى $x + y + 2z - 3 = 0$ أم لا

الباب الرابع
المستوى

الحل:

حيث أن

$$f(1,1,2) = 1 + 1 + 2 \times 2 - 3$$

$$= 3 > 0$$

$$f(1,-1,3) = 1 + 1 \times -1 + 2 \times 3 - 3 \quad \&$$

$$f(2,3,4) = 2 + 3 + 2 \times 4 - 3 \quad \&$$

$$= 10 > 0$$

إذن النقط الثلاث المعطاه تقع جميعها فى نقطة واحدة

الباب الرابع
المستوى

نظرية (4-5):

معادلة المستوى بمعلومية طول العمودى الساقط عليه من نقطة الأصل وجيوب تمام الإتجاه لهذا العمود.

أثبت أن معادلة المستوى طول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوى r وجيوب تمام إتجاه هذا العمود هى ℓ, m, n تكون

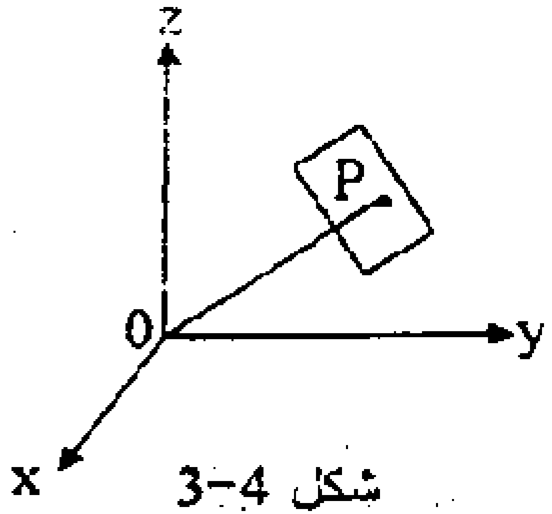
$$\ell x + my + nz = r \qquad (4\text{-}2)$$

الباب الرابع
المستوى

البرهان:

نفرض أن العمودى على المستوى من نقطة الأصل O يلاقى المستوى فى نقطة P ونفرض أن $OP = r$. (شكل 3–4) ومن ثم نجد أن النقطة P هى: $P(r\ell, rm, rn)$

إذن بتطبيق المعادلة 4–1 يكون



شكل 3–4

$$\ell(x - \ell r) + m(y - mr) + n(z - nr) = 0$$

$$\ell x + my + nz = r(\ell^2 + m^2 + n^2) = r$$

الباب الرابع
المستوى

مثال:

أوجد طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستوى

$$2x + 3y - 5z + 7 = 0$$

ثم أوجد جيوب تمام هذا العمود وإحداثيات النقطة التى يلتقى فيها العمودى والمستوى

الباب الرابع
المستوى

الحل:

المعادلة المعطاه $-2x - 3y + 5z = 7$

وبمراجعة المعادلة 4–2 نجد أن معاملات x,y,z هى عبارة عن جيوب تمام إتجاه، وبالتالى نضرب المعادلة فى $1/\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(5)^2} = 1/\sqrt{38}$

وبالتالى فإن المعادلة المعطاه تكون فى صورة المعادلة 4–2 كالآتى

$$\frac{-2}{\sqrt{38}}x + \frac{-3}{\sqrt{38}}y + \frac{z}{\sqrt{38}} = \frac{7}{\sqrt{38}}$$

الباب الرابع
المستوى

وبالتالى فإن طول العمودى هو $\frac{7}{\sqrt{38}}$ وجيوب تمام إتجاهه هى

$$\frac{-2}{\sqrt{38}},\ \frac{-3}{\sqrt{38}},\ \frac{5}{\sqrt{38}}$$

ونقطة التلاقى هى

$$P = (\ell r, mr, nr)$$
$$= \left(\frac{-7}{19}, \frac{-21}{38}, \frac{35}{38}\right)$$

الباب الرابع
المستوى

نظريه (6−4)

طول العمود الساقط من النقطة $P(x_1, y_1, z_1)$ على المستوى

$ax + by + cz + d = 0$ هو

$$\pm \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

الباب الرابع
المستوى

نظرية (4-7):

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين غير المتوازيين

$$d_1 : f(x,y,z) = ax_1 + by_1 + cz_1 + d_1 = 0$$

$$d_2 : y(x,y,z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

تعطى بمعادلة $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0$ حيث $\lambda \in R$

الباب الرابع
المستوى

مثال: أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

$d_1 : x + y + z - 1 = 0$ & $d_2 : 2x + 3y - 4z - 1 = 0$ ويمر بالنقطة

.(1,2,3)

الحل:

مما سبق نجد أن معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين d_1،d_2 هي

$$(x + y + z - 1) + \lambda(2x + 3y - 4z - 1) = 0$$

ولكن النقطة (1,2,3) تقع على المستوى المطلوب معادلته، إذن فهي تحققها، أي أن

$$42 + 3 - 1 + \lambda(2 + 3 \times 2 - 4 \times 3 - 1) = 0$$

i.e. $5 - \lambda 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

إذن معادلة المستوى المطلوب هي: $3x + 4y - 3z - 2 = 0$

الباب الرابع
المستوى

- شرط تقاطع ثلاث مستويات فى خط مستقيم واحد.

$$\frac{d_1+\lambda_0 d_2}{d_3}=\frac{a_1+\lambda_0 a_2}{a_3}=\frac{b_1+\lambda_0 b_2}{b_3}=\frac{c_1+\lambda_0 c_2}{c_3} \qquad (4-4)$$

إذن الشرط اللازم لتقاطع ثلاث مستويات فى نقطة واحدة هو إيجاد λ_0 التى تجعل التناسب فى المعادلة 4-4 محقق.

الباب الرابع
المستوى

مثال:

أوجد الشرط اللازم لتقاطع المستويات الثلاثة:

$$d_1 : 3x + 4y + z - 1 = 0,$$
$$d_2 : x - y + z + 3 = 0,$$
$$d_3 : 4x + 3y + 2z + 2 = 0,$$

في خط مستقيم واحد.

الباب الرابع
المستوى

.

الحل:

بالتعويض فى المعادلة 4-4 أعلاه، نجد أن

$$\frac{3+\lambda_0}{4}=\frac{4-\lambda_0}{3}=\frac{1+\lambda_0}{2}=\frac{-1+\lambda_0}{2}$$

وبأخذ $\lambda_0 = 1$ نجد أن التناسب يتحقق وبالتالى تتلاقى المستويات الثلاث فى مستقيم

الباب الرابع
المستوى

مثال:

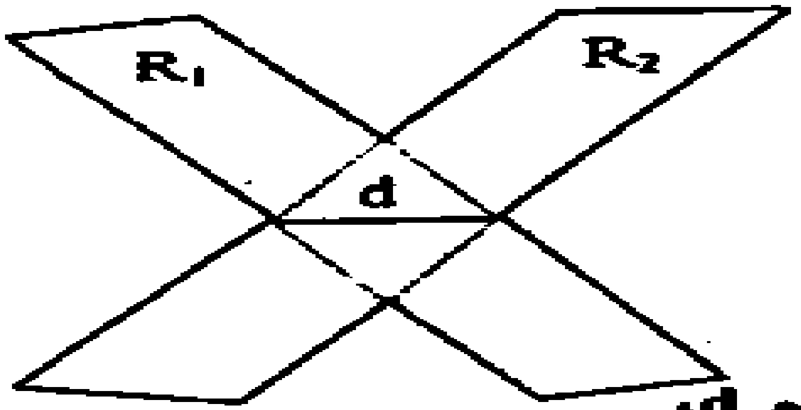
أكتب معادلة الخط المستقيم d الناتج عن تقاطع المستويين

$$R_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$R_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

الباب الرابع
المستوى

الحل:



حيث أن نسب إتجاه العمودي على المستوى هي a_1,b_1,c_1 وكذلك a_2,b_2,c_2 هي نسب إتجاه العمودي على R_2 - ولكن كلا العمودين يكونان عمودياً على المستقيم d. وبالتالي بفرض أن ℓ,m,n هي جيوب تمام إتجاه المستقيم d.

$$a_1\ell + b_1m + c_1n = 0$$

$$a_2\ell + b_2m + c_2n = 0$$

وتحصل هاتين المعادلتين (فى ثلاث متغيرات)، نفترض أحد المتغيرات معلوم ولوكن $\ell = \lambda$ إذن نحل المعادلتين

$$b_1m + c_1n \quad = \quad -a_1\lambda$$

الباب الرابع
المستوى

$b_2 m + c_2 n = -a_2 \lambda$ في المتغيرين $m \& n$ نحصل على

$$\ell = \lambda, \quad m = \frac{-a_1 c_2 - c_1 a_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} \lambda, \quad n = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} \lambda$$

إذن بالضرب في $(c_1 b_2 - c_2 b_1)/\lambda$ نجد أن ℓ, m, n تتناسب مع $c_1 b_2 - c_2 b_1, \quad c_1 a_2 - c_2 a_1, \quad a_2 b_1 - a_1 b_2$ وبالتالي فإن الأعداد الأخيرة تمثل نسب إتجاه للمستقيم d. ولإيجاد معادلة المستقيم d، يلزم تحديد نقطة على d. وذلك بحل المعادلتين $R_1 \& R_2$ عند مستويات الإحداثيات. بمعنى. عند وضع $x = 0$ في المعادلتين فإننا نحسب نقطة تقاطع المستقيم d مع مستوى الإحداثيات YOZ. بحل المعادلتين $b_1 y + c_1 z = d_1 \quad \& \quad b_2 y + c_2 z = d_2$.

نحصل على النقطة $\left(0, \dfrac{c_1 d_2 - d_1 c_2}{b_1 c_2 - c_1 b_2}, \dfrac{d_1 b_2 - b_2 d_1}{b_1 c_2 - c_1 b_2}\right)$

الباب الرابع
المستوى

على المستقيم d. وبالتالي فإن معادلة المستقيم d هي:

$$\frac{x-0}{c_1b_2-c_2b_1}=\frac{y-\dfrac{c_1d_2-d_1c_2}{b_1c_2-c_1b_2}}{a_2c_2-c_1a_2}=\frac{z-\dfrac{c_1d_2-d_1c_2}{b_1c_2-c_1b_2}}{a_2b_1-a_1b_2}$$

أي أن المستقيم الناتج له نسب الإتجاه

$$c_1b_2-c_2b_1,\quad a_1c_2-c_1a_2,\quad a_2b_1-a_1b_2$$

الباب الرابع
المستوى

مثال:

نوجد معادلة المستقيم

$$2x + 3y + z - 8 = 0 \quad \& \quad 4x + 3y - z - 6 = 0$$

الحل:

بوضع $z = 0$ (مثلاً) فى معادلتى المستويين (أى فى معادلة المستقيم المعطى) نحصل على المعادلتين.

$$2x + 3y = 8 \quad \& \quad 4x + 3y = 6$$

ونحل هــاتين المعــادلتين نجــد أن $x = -1$ & $y = 10/3$ ، إذن النقطــة $(-1, 10/3, 0)$ تقع على خط تقاطع المستويين المعطيين. إذن بإســتخدام المثال السابق تكون معادلة المستقيم المطلوبة هي:

$$\frac{x+1}{1 \times 3 - (-1)(3)} = \frac{y+10/3}{(2)(-1) - (1)(4)} = \frac{z-0}{-2 \times 3 + 3 \times 4}$$

أى أن

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-10/3}{-6} = \frac{z}{+6}$$

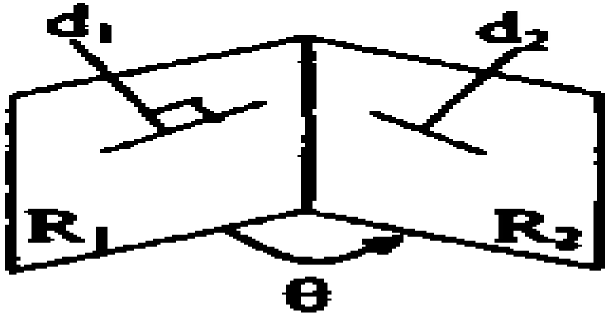
i.e. $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-10/3}{-1} = \frac{z}{+1}$$

الباب الرابع
المستوى

إتجاه الزاوية بين مستويين (4-8):

الزاوية بين مستويين هي الزاوية المحصورة بين العمودين على المستويين. أي أن الزاوية بين المستويين R_1, R_1 هي الزاوية بينما العمودين. d_1, d_2 عليهما على الترتيب. الآن بفرض معادلتي المستويين هما

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \;\&$$



$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

الباب الرابع
المستوى

وبالتالى فإن نسب إتجاه العمودين

$d_1 . d_2$ هى a_2, b_2, c_2 & a_1, b_1, c_1 على الترتيب ومنها فإن جيوب تمام $d_1 . d_2$ هى

$$\frac{a_1}{r_1}, \frac{b_1}{r_1}, \frac{c_1}{r_1} \;\&\; \frac{a_2}{r_2}, \frac{b_2}{r_2}, \frac{c_2}{r_2}$$

حيث

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \quad \& \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$$

وبالتالى بفرض أن الزاوية بين $d_1 \,\&\, d_2$ هى θ فإن الزاوية بين المستويين R_1, R_1 تعطى بالعلاقة:

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)}}$$

الباب الرابع
المستوى

وبالتالي فإن شرط توازي مستويين هو:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}$$

وشرط تعامد مستويين هو

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

الباب الرابع
المستوى

مثــال:

نوجد الزاوية بين المستويين

$$2x + 3y + z - 8 = 0 \quad \& \quad 4x + 3y - z - 6 = 0$$

الحــل:

مما سبق مباشرة نرى أن

$$\cos\theta = \frac{2\times 4 + 3\times 3 + 1\times -1}{\sqrt{(2^2 + 3^2 + 1^2)(4^2 + 3^2 + (-1)^2)}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{14\times 26}} = \frac{8}{\sqrt{91}}$$

i.e $\quad \theta = \cos^{-1}\left(8/\sqrt{91}\right)$

حيث θ هى الزاوية بين المستويين المعطيين.

الباب الرابع
المستوى

(4–9) معادلتا المستويين المنصفين للزاويتين بين مستويين آخرين:

بفرض المستويين

$$R_1 : f_1(x,y,z) = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$R_2 : f_2(x,y,z) = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

هى المستويين المطلوب إيجاد معادلتي المنصفين للزاويتين بينهما.

ولكن المستوى المنصف للزاوية بين R_1 ، R_2 هو الحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون متساوية البعد عن R_1 ، R_2 ، وبالتالى فإن الحل الهندسي المطلوب يوصف بالمعادلة:

الباب الرابع
المستوى

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

انظر نظرية (6−4).

الباب الرابع
المستوى

مثـــال:

اثبت أن أى نقطة على المستوى $2x - 2y - 5 = 0$ تكون متساوية البعد عن المستويين

$$2x + 4y + 2z - 1 = 0 \quad \& \quad 2x + y + z - 3 = 0$$

الحـــل:

مما سبق نستطيع إيجاد معادلتى المستويين المنصفين للزاوية بين المستويين المعطيين وهى

$$\frac{2x + 4y + 2z - 1}{\sqrt{4 + 16 + 4}} = \pm \frac{2x + y + z - 3}{\sqrt{4 + 1 + 1}}$$

i.e $\quad (2x + 4y + 2z - 1) = \pm 2(2x + y + z - 3)$

الباب الرابع
المستوى

والتى تمثل المعادلتين

$$6x + 6y + 4y - 5 = 0 \quad \& \quad -2x + 2y + 5 = 0$$

إذن أحد هاتين المعادلتين هي المعادلة المعطاة، وبذلك نجد أن أى نقطة واقعة على المستوى الأخير تكون متساوية البعد عن المستويين المعطيين.

تم الإنتهاء من المحاضرة

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته