<u>**المحاضرتان الثامنة والتاسعة**</u>

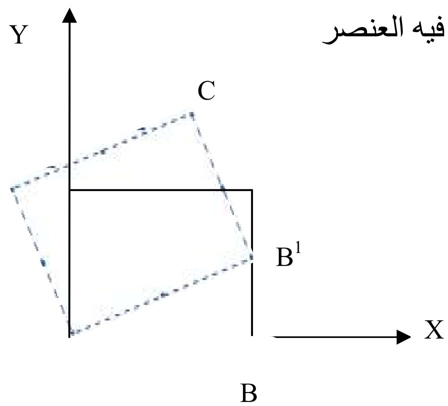
استنتج صيغة رياضية للدوران في الموائع؟

Derive mathematical form of rotation in fluids ?

الحل

لاشتقاق صيغة رياضية للدوران في الموائع ناخذ عنصر من المائع على شكل مستطيل سمكه الوحده وبعديه هما $\delta x, \delta y$ حيث مركبتي السرعة عند A هما A(u, v) وعند B هما $B(u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x, v+\frac{\partial v}{\partial x}\delta x)$ وعند D هما $D(u+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, v+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y)$

كما هو موضح بالشكل فاذا دار العنصر بحيث الحرف AB يدور بزاوية $\delta\theta_1$ والحرف AD يدور بزاوية $\delta\theta_2$ حول محور عمودي على المستوى الذي يقع فيه العنصر



$$\delta\theta_1 = \tan\delta\theta_1 = \frac{v_{BA}\delta t}{\delta x}$$

$$\delta\theta_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \qquad (1)$$

وبالمثل يكون :

$$\delta\theta_2 = \tan\delta\theta_2 = \frac{u_{DA}\delta t}{\delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}\delta t \qquad (2)$$

من (1,2) نحصل على

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta\theta_1}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \qquad (3)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \lim_{\delta t \to 0}\frac{\delta\theta_2}{\delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

وحيث أن العنصر يظل مستطيلا فإن من تعريف الدوران نحصل على

$$\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = \delta\theta \qquad (5)$$

بجمع (3, 4) واستخدام (5) نحصل على

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\varsigma_3 = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\times\underline{v})_z$$

وإذا كان العنصر في المستوى y-z والدوران حول x فإن

$$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{1}{2}\varsigma_1=\frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\times\underline{v}\right)_x$$

وإذا كان العنصر في المستوى x-z والدوران حول y فإن

$$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\varsigma_2=\frac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\times\underline{v}\right)_y$$

وبطرح (4) من (3) واستخدام (5) نحصل على

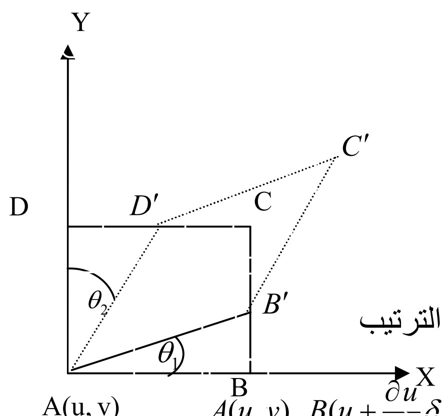
$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (6)$$

وهذه المعادلة تعني أنه لا يوجد تشوه للعنصر أثناء الدوران.

استنتج صيغة رياضية لمعدل التشوه القصي في الموائع؟

Drive mathematical from for shear deformation rate?

الحل



لاشتقاق صيغة رياضية لمعدل التشوه القصي في الموائع

نأخذ عنصر على شكل مستطيل بعديه $\delta x, \delta y$ وسمكه الوحدة

وبحيث يكون مركبتي السرعة عند النقاط A, B, C, D هي على الترتيب

$A(u,v),\ B(u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x, v+\frac{\partial v}{\partial x}\delta x),\ C(u+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, v+\frac{\partial v}{\partial x}\delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y),$

$D(u+\frac{\partial u}{\partial y}\delta y, v+\frac{\partial v}{\partial y}\delta y).$ كما هو موضح بالرسم وحيث أن معدل التشوه (معدل الإنفعال)

القصى يعرف على انه متوسط معدل التغير في الزاوية القائمة بين AB, ADأي أن :

$$e_{12}=\dot{\gamma}_{12}=\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-(\theta_1+\theta_2)\right)\right]$$

$$e_{12}=\dot{\gamma}_{12}=\frac{1}{2}\frac{\delta(\theta_1+\theta_2)}{\delta t} \qquad (1)$$

حيث $e_{12}=\dot{\gamma}_{12}$ تسمى معدل التشوه القصي في المستوى x-y ولكن من هندسة الشكل يكون

$$\delta\theta_1 = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \Rightarrow \quad \frac{\delta\theta_1}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

$$\delta\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t \Rightarrow \quad \frac{\delta\theta_2}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

وبالتعويض من (3),(2) في (1) نحصل على

$$e_{12} = \dot{\gamma}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

وبالمثل يكون معدل التشوه القصي في مستوى x-z والمستوى y-z على الصورة :

$$e_{13} = \dot{\gamma}_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$e_{23} = \dot{\gamma}_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

استنتج صيغة رياضية لمعدل التشوه الحجمي في الموائع ؟

Derive mathematical from of volumetric deformation fluid

الحل

للحصول على صيغة رياضية لمعدل الانفعال الحجمي نأخذ عنصر حجمي أبعاده $\delta x, \delta y, \delta z$ ونعرف معدل الانفعال الحجمي بالصورة الاتيه :

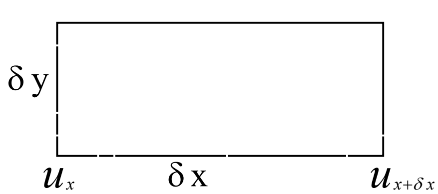
معدل الانفعال الحجمي هومعدل التغير في الحجم بالنسبة للزمن إلى الحجم ويصاغ رياضيا على الصورة

$$\text{معدل الإنفعال الحجمي} = \frac{1}{\Lambda V}\frac{d(\delta x\,\delta y\,\delta z)}{d t}$$

$$= \frac{1}{\Delta V}\left[\frac{d(\delta x)}{d t}\delta y\,\delta z + \frac{d(\delta y)}{d t}\delta x\,\delta z + \frac{d(\delta z)}{d t}\delta x\,\delta y\right] (1)$$

ولكن على سبيل المثال نعتبر التغير في مركبة السرعة في اتجاه محور xعلى النحو التالي

من مفكوك تيلور يكون



$$u_{x+\delta x} - u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x \tag{2}$$

وأيضا من تعريف السرعة النسبية يكون

$$u_{x+\delta x}-u_x=\frac{d(\delta x)}{dt} \qquad (3)$$

من (3) ,(2) نحصل على

$$\frac{d(\delta x)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\delta x \qquad (4)$$

وكذلك يكون التغير في مركبتي السرعة في اتجاهي المحورين y, z على الصورة :

$$\frac{d(\delta y)}{dt}=\frac{\partial v}{\partial y}\delta y \qquad (5)$$

$$\frac{d(\delta z)}{dt}=\frac{\partial w}{\partial z}\delta z \qquad (6)$$

وبالتعويض من (4, 5, 6) في (1) نحصل على

$$\text{معدل الإنفعال الحجمي}=\frac{1}{\Delta V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta V\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$=\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$$

أي أن $\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$ يمثل معدل الانفعال الحجمي لمائع قابل للانضغاط وإذا كان المائع غير قابل للإنضغاط فان $\underline{\nabla}\cdot\underline{v}=0$ أي أن معدل الانفعال الحجمي للموائع غير قابلة للانضغاط يتلاشى.

فإذا انحل العنصر الحجمي الذي أبعاده $\delta x,\delta y,\delta z$ إلى عنصر حجمي ينطبق على محور x وأصبحت أبعاده هي $\delta x,1,1$ فان معدل الانفعال الحجمي يصبح معدل انفعال عمودي في اتجاه محور x ويكون على الصورة التالية :-

$$e_{11}=\dot{\gamma}_{11}=\frac{1}{\delta x}\frac{d(\delta x)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

وإذا كان العنصر الحجمي أبعاده $1,\delta y,1$ فان معدل الانفعال الحجمي يصبح معدل انفعال عمودي في اتجاه محور y ويكون على الصورة التالية :-

$$e_{22}=\dot{\gamma}_{22}=\frac{1}{\delta y}\frac{d(\delta y)}{dt}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

وبالمثل إذا كان العنصر الحجمي أبعاده $1, 1, \delta z$ فان معدل الانفعال الحجمي يصبح معدل انفعال عمودي في اتجاه محور z ويكون على الصورة التالية :-

$$e_{33} = \dot{\gamma}_{33} = \frac{1}{\delta z}\frac{d(\delta z)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

وبالتالي تكون مركبات ممتد معدل الانفعال في الفراغ (ثلاثة أبعاد) على الصورة

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y},\ e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z},\quad e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = e_{21}$$

$$e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = e_{31},\qquad e_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = e_{32}$$

ويمكن كتابة الكميات التسعة على الصورة

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

ويمكن الحصول عليه مباشرة في الإحداثيات المختلفة باستخدام العلاقة التالية :

$$\underline{e}_i \underline{e}_j e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\underline{\nabla}\,\underline{v} + \left(\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)^T\right]$$

العلاقة بين ممتد كوشي للإجهاد و ممتد إجهاد اللزوجة وممتد الإجهاد الحجمي لمانع نيوتوني لزج وقابل للإنضغاط تكون على الصورة التالية

$$\underset{\sim}{\tau} = -p\,\underset{\sim}{\delta} + \underset{\sim}{\sigma}$$

حيث $\underset{\sim}{\sigma}$ يسمى ممتد إجهاد اللزوجة، $p\,\underset{\sim}{\delta}$ يسمى ممتد الإجهاد الحجمي الذي يغير من حجم عنصر المائع.

فرض استوك أن العلاقة بين ممتد إجهاد اللزوجة وممتد معدل الانفعال تكون على الصورة التالية

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\mu\,\underset{\sim}{e} - \frac{2}{3}\mu\, e_{kk}\,\underset{\sim}{\delta}$$

العلاقة بين مركبات ممتد الاجهاد ومركبات ممتد معدل الانفعال لمانع نيوتوني لزج وقابل للإنضغاط في الصورة الممتدية تكون كالتالي

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\, e_{kk}\delta_{ij} \qquad (1)$$

حيث $, e_{kk}=\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$

$\sigma_{ij}=2\mu e_{ij}-\frac{2}{3}\mu e_{kk}\delta_{ij}$ يسمى مركبات ممتد إجهاد اللزوجة

وإذا كان المائع غير قابل للإنضغاط فان معادلة الحالة constitutive equation تأخذ الصورة :

$$\tau_{ij}=-p\delta_{ij}+2\mu e_{ij}$$

ومن العلاقة (1) تكون مركبات ممتد الإجهاد على الصورة

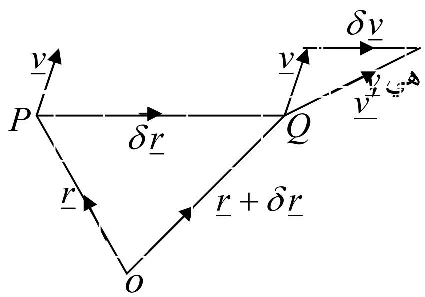
$$\tau_{11}=-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\underline{\nabla}\cdot\underline{v},\ \ \tau_{22}=-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\underline{\nabla}\cdot\underline{v}$$

$$\tau_{33}=-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\underline{\nabla}\cdot\underline{v},\ \ \ \tau_{12}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\tau_{21}$$

$$\tau_{13}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\tau_{31},\qquad \tau_{23}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\tau_{32}$$

وضح أن الحركة العامة لعنصر مائع تكون توليفة من الحركة الانتقالية والدورانية والانفعالية لعنصر المائع.

الحل



باعتبار حركة عنصر مائع من النقطة P التي متجه موضعها هو $\underline{r}$ والسرعة عندها هي $\underline{v}$

إلى النقطة Q والتي متجه موضعها هو $\underline{r}+\delta\underline{r}$ والسرعة عندها هي $\underline{v}'$

حيث من هندسة الشكل يكون

$$\underline{v}'=\underline{v}+\delta\underline{v}\qquad(1)$$

المعادلة (1) يمكن كتابتها بدلالة تدرج السرعة بالصورة

$$\underline{v}'=\underline{v}+\underline{\nabla}\underline{v}\cdot\delta\underline{r}\qquad(2)$$

وكذلك المعادلة (2) يمكن كتابتها بدلالة ممتدي معدل الدوران ومعدل الإنفعال بالصورة

$$\underline{v}'=\underline{v}+\tfrac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\underline{v}-\left(\underline{\nabla}\underline{v}\right)^{T}\right)\cdot\delta\underline{r}+\tfrac{1}{2}\left(\underline{\nabla}\underline{v}+\left(\underline{\nabla}\underline{v}\right)^{T}\right)\cdot\delta\underline{r}\qquad(3)$$

وحيث أن ممتدي معدل الدوران ومعدل الإنفعال يعرفان بالصورتين التاليتين

$$\underset{\sim}{\omega}=\frac{1}{2}\left(\nabla\underline{v}-\left(\nabla\underline{v}\right)^{T}\right),\underset{\sim}{e}=\frac{1}{2}\left(\nabla\underline{v}+\left(\nabla\underline{v}\right)^{T}\right) \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$\underline{v}'=\underline{v}+\underset{\sim}{\omega}\cdot\delta\underline{r}+\underset{\sim}{e}\cdot\delta\underline{r} \qquad (5)$$

ومن المعادلة (5) يتضح أن الحركة العامة لعنصر مائع هي توليفة من الحركة الانتقالية والدورانية والانفعالية حيث $\underline{v}$ يمثل متجه سرعة الإنتقال؛ $\underset{\sim}{\omega}\cdot\delta\underline{r}$ يمثل متجه سرعة الدوران؛ $\underset{\sim}{e}\cdot\delta\underline{r}$ يمثل متجه سرعة الإنفعال.

مثال1

إذا كان مجال سرعة سريان ما معطى بالصورة $\vec{v}=a\,x\,y^{2}\,\hat{i}+b\,x^{2}\,y\,\hat{j}+c\,x\,y\,z\,\hat{k}$ حيث a,b,c ثوابت. أوجد سرعة الانتقال والسرعة الزاوية ومركبات ممتد معدل الانفعال ومركبات متجه سرعة معدل الانفعال لعناصر المائع.

الحل

حيث أن مجال سرعة السريان هي $\vec{v}=a\,x\,y^{2}\,\hat{i}+b\,x^{2}\,y\,\hat{j}+c\,x\,y\,z\,\hat{k}$ فإن سرعة انتقال عناصر المائع تكون $\vec{v}=a\,x\,y^{2}\,\hat{i}+b\,x^{2}\,y\,\hat{j}+c\,x\,y\,z\,\hat{k}$. والسرعة الزاوية يمكن الحصول عليها من العلاقة التالية

$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right)$ والتي يمكن كتابتها في الصورة الممتدية التالية $\omega_{k}\hat{e}_{k}=\frac{1}{2}e_{ijk}\,v_{j,i}e_{k},i,j,k=1,2,3$

ومنها نحصل على مركبات السرعة الزاوية في الصورة التالية

$$\omega_{1}=\frac{1}{2}\left(v_{3,2}-v_{2,3}\right)=\frac{1}{2}c\,x\,z,\omega_{2}=\frac{1}{2}\left(v_{1,3}-v_{3,1}\right)=-\frac{1}{2}c\,y\,z,\omega_{3}=\frac{1}{2}\left(v_{2,1}-v_{1,2}\right)=\left(b-a\right)x\,y$$

ومركبات ممتد معدل الانفعال نحصل عليها من العلاقة التالية $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right),i,j=1,2,3$

حيث يكون $e_{11}=v_{1,1}=a\,y^{2},e_{22}=v_{2,2}=b\,x^{2},e_{33}=v_{3,3}=c\,x\,y,$

$$e_{1,2}=e_{2,1}=\frac{1}{2}\left(v_{1,2}+v_{2,1}\right)=\left(a+b\right)x\,y,e_{1,3}=e_{3,1}=\frac{1}{2}\left(v_{1,3}+v_{3,1}\right)=\frac{1}{2}c\,y\,z,$$

$$e_{2,3} = e_{3,2} = \frac{1}{2}\left(v_{2,3} + v_{3,2}\right) = \frac{1}{2} c\,x\,z.$$

ومركبات متجه سرعة معدل الانفعال نحصل عليها من العلاقة التالية $D_i = e_{ij}\delta x_j , i, j = 1,2,3$

حيث يكون

$$D_1 = e_{11}\,\delta x_1 + e_{12}\,\delta x_2 + e_{13}\,\delta x_3 , D_2 = e_{21}\,\delta x_1 + e_{22}\,\delta x_2 + e_{23}\,\delta x_3 , D_3 = e_{31}\,\delta x_1 + e_{32}\,\delta x_2 + e_{33}\,\delta x_3$$

$$D_1 = a\,x_2^2\,\delta x_1 + (a+b)x_1 x_2 \delta x_2 + \frac{1}{2} c\,x_2 x_3\,\delta x_3 , D_2 = (a+b)x_1 x_2\,\delta x_1 + b x_2^2\,\delta x_2 + \frac{1}{2} c\,x_1 x_3\,\delta x_3 ,$$

$$D_3 = \frac{1}{2} c\,x_2 x_3\,\delta x_1 + \frac{1}{2} c\,x_1 x_3\,\delta x_2 + c\,x_1 x_2\,\delta x_3 .$$

مثال2

إذا كان مجال سرعة سريان مائع معطى بالصورة $\vec{v} = (1+2y-3z)\hat{i} + (4-2x+5z)\hat{j} + (6+3x-5y)\hat{k}$
وضح أن حركة المائع تمثل حركة جسم متماسك.

الحل

حركة المائع تمثل حركة جسم متماسك إذا كان مركبات متجه سرعة الانتقال ومركبات ممتد معدل الدوران لا تتلاشى ولكن تتلاشى مركبات ممتد معدل الانفعال

وحيث أن مجال السرعة لسريان المائع هي $\vec{v} = (1+2y-3z)\hat{i} + (4-2x+5z)\hat{j} + (6+3x-5y)\hat{k}$ فإن
مركبات سرعة الانتقال لا تتلاشى

وحيث أن مركبات ممتد معدل الدوران تتعين من العلاقة التالية $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right), i, j = 1,2,3$

فإن $\omega_{11} = \frac{1}{2}\left(v_{1,1} - v_{1,1}\right) = 0, \omega_{12} = \frac{1}{2}\left(v_{1,2} - v_{2,1}\right) = 2, \omega_{13} = \frac{1}{2}\left(v_{1,3} - v_{3,1}\right) = -3,$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2}\left(v_{2,2} - v_{2,2}\right) = 0, \omega_{23} = \frac{1}{2}\left(v_{2,3} - v_{3,2}\right) = 5, \omega_{31} = \frac{1}{2}\left(v_{3,1} - v_{1,3}\right) = 3,$$

$$\omega_{33}=\frac{1}{2}\left(v_{3,3}-v_{3,3}\right)=0, \omega_{32}=\frac{1}{2}\left(v_{3,2}-v_{2,3}\right)=-5, \omega_{21}=\frac{1}{2}\left(v_{2,1}-v_{1,2}\right)=-2,$$

وحيث أن مركبات ممتد معدل الانفعال تتعين من العلاقة التالية $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right), i,j=1,2,3$

فإن $e_{11}=v_{1,1}=0, e_{21}=e_{12}=\frac{1}{2}\left(v_{1,2}+v_{2,1}\right)=0, e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(v_{1,3}+v_{3,1}\right)=0, e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(v_{2,3}+v_{3,2}\right)=0$

$$e_{22}=v_{2,2}=0, e_{33}=v_{3,3}=0$$

مما سبق يتضح أن مركبات متجه سرعة الانتقال ومركبات ممتد معدل الدوران لا تتلاشى ولكن تتلاشى مركبات ممتد معدل الانفعال لذلك فإن حركة المائع تمثل حركة جسم متماسك.

<u>مثال3</u>

إذا كان مجال سرعة سريان مائع معطى بالصورة $\vec{v}=\left(a\left(x+y\right)+u_{\circ}\right)\hat{i}+\left(b\left(x^2-y^2\right)+v_{\circ}\right)\hat{j}+\left(w_{\circ}-2cz\right)\hat{k}$ حيث a,b,c ثوابت، $\left(u_{\circ},v_{\circ},w_{\circ}\right)$ مركبات سرعة المائع عند نقطة الأصل وضح أن حركة المائع تمثل حركة انتقالية ودورانية وانفعالية.

<u>الحل</u>

حركة المائع تمثل حركة انتقالية ودورانية وانفعالية إذا كان مركبات متجه سرعة الانتقال ومركبات ممتد معدل الدوران ومركبات ممتد معدل الانفعال لا تتلاشى

وحيث أن مجال السرعة لسريان المائع هي $\vec{v}=\left(a\left(x+y\right)+u_{\circ}\right)\hat{i}+\left(b\left(x^2-y^2\right)+v_{\circ}\right)\hat{j}+\left(w_{\circ}-2cz\right)\hat{k}$ فإن مركبات سرعة الانتقال لا تتلاشى

وحيث أن مركبات ممتد معدل الدوران تتعين من العلاقة التالية $\omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(v_{i,j}-v_{j,i}\right), i,j=1,2,3$

فإن $\omega_{11}=\frac{1}{2}\left(v_{1,1}-v_{1,1}\right)=0, \omega_{12}=\frac{1}{2}\left(v_{1,2}-v_{2,1}\right)=\frac{1}{2}\left(a-2bx\right), \omega_{13}=\frac{1}{2}\left(v_{1,3}-v_{3,1}\right)=0,$

$$\omega_{22}=\frac{1}{2}\left(v_{2,2}-v_{2,2}\right)=0,\omega_{23}=\frac{1}{2}\left(v_{2,3}-v_{3,2}\right)=0,\omega_{31}=\frac{1}{2}\left(v_{3,1}-v_{1,3}\right)=0,$$

$$\omega_{33}=\frac{1}{2}\left(v_{3,3}-v_{3,3}\right)=0,\omega_{32}=\frac{1}{2}\left(v_{3,2}-v_{2,3}\right)=0,\omega_{21}=\frac{1}{2}\left(v_{2,1}-v_{1,2}\right)=-\frac{1}{2}(a-2bx),$$

وحيث أن مركبات ممتد معدل الانفعال تتعين من العلاقة التالية $e_{ij}=\frac{1}{2}\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right), i,j=1,2,3$

فإن $e_{11}=v_{1,1}=a, e_{21}=e_{12}=\frac{1}{2}\left(v_{1,2}+v_{2,1}\right)=\frac{1}{2}(a+2bx),$

$$e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(v_{1,3}+v_{3,1}\right)=0, e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(v_{2,3}+v_{3,2}\right)=0$$

$$e_{22}=v_{2,2}=-2by, e_{33}=v_{3,3}=-2c$$

مما سبق يتضح أن مركبات متجه سرعة الانتقال ومركبات ممتد معدل الدوران ومركبات ممتد معدل الانفعال لا تتلاشى لذلك فإن حركة المائع تمثل حركة انتقالية ودورانية وانفعالية.

استنتج معادلة الحركة لمائع لزج وقابل للإنضغاط في الصورة الإتجاهية.

استنتج معادلة نافير-استوك لمائع لزج وقابل للإنضغاط في الصورة الإتجاهية.

استنتج معادلة بقاء كمية الحركة الخطية لمائع لزج وقابل للإنضغاط في الصورة الإتجاهية.

لاستنتاج معادلة الحركة أو معادلة نافير-استوك أو معادلة بقاء كمية الحركة الخطية لمائع لزج وقابل للإنضغاط في الصورة الإتجاهية نتبع الآتي

1- نأخذ حجم اختياري V من المائع اللزج والقابل للإنضغاط والمحاط بالسطح S ثم نأخذ منه عنصر حجمي δV والمحاط بعنصر السطح δS حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عمودي للخارج على عنصر المساحة δS.

2- نفرض أن سرعة عنصر المائع الحجمي هي $\vec{v}$ وكثافته ρ عند أي نقطة P داخل المائع اللزج وعند اللحظة الزمنية t.

3- نفرض أن القوتين الداخلية والخارجية المؤثرة على عنصر المائع هما

أ- القوة الداخلية (القوة السطحية $\vec{\tau}_n$ الناشئة عن المائع المحيط بعنصر الحجم وهي قوة لوحدة المساحات)

ب- القوة الخارجية (القوة الحجمية) $\vec{F}$ لوحدة الكتل

وحيث أن القوة السطحية الناشئة عن المائع المحيط بعنصر الحجم هي $\vec{\tau}_n$ فإن محصلة القوى السطحية المؤثرة على المائع اللزج داخل الحجم V هي $\int_S \vec{\tau}_n \, dS = \int_S \left(\underset{\sim}{\tau} \cdot \hat{n}\right) dS$ وباستخدام نظرية جاوس للإنتشار تصبح المعادلة على الصورة

$$\int_S \vec{\tau}_n \, dS = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau}\right) dV \qquad (1)$$

وحيث أن القوة الحجمية لوحدة الكتل هي $\vec{F}$ فإن محصلة القوى الحجمية المؤثرة على الحجم V تكون

$$\int_V \rho \vec{F} \, dV \qquad (2)$$

وحيث أن كمية حركة عنصر الحجم δV تكون $\rho \vec{v} \delta V$ فإن كمية حركة المائع داخل الحجم V تكون

$$\int_V \rho \vec{v} \, dV \qquad (3)$$

وطبقا لقانون نيوتن الثاني يكون

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{v} \, dV = \int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau} + \rho \vec{F}\right) dV \qquad (4)$$

وباستخدام نظرية رينولد للإنتقال تصبح المعادلة (4) على الصورة التالية

$$\int_V \left(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau} - \rho \vec{F}\right) dV = 0 \qquad (5)$$

وحيث أن عنصر الحجم dV اختياري ولا يساوي صفر فإن

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau} + \rho \vec{F} \qquad (6)$$

وهذه معادلة الحركة للموائع اللزجة القابلة للإنضغاط في الصورة الإتجاهية

فإذا كان المائع اللزج لا نيوتونيا فإن ممتد كوشي للإجهاد يكون على الصورة التالية

$$\underset{\sim}{\tau} = -p \underset{\sim}{\delta} + \underset{\sim}{\sigma} \qquad (7)$$

حيث $p \underset{\sim}{\delta}$ يمثل ممتد الإجهاد الحجمي والذي يغير من حجم عنصر المائع، $\underset{\sim}{\sigma}$ يمثل ممتد إجهاد اللزوجة والذي يحدث التشوه في عنصر المائع. وبالتعويض من (7) في (6) نحصل على

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\sigma}+\rho\vec{F} \qquad (8)$$

المعادلة (8) تمثل معادلة الحركة الحاكمة لحركة الموائع اللزجة اللانيوتونية.

أما إذا كان المائع اللزج نيوتونيا وقابل للإنضغاط ومعامل لزوجته متغيرة فإن استوك فرض العلاقة بين ممتد اجهاد اللزوجة وممتد معدل الإنفعال على الصورة التالية

$\underset{\sim}{\sigma}=2\mu\underset{\sim}{e}-\frac{2}{3}\mu e_{kk}\underset{\sim}{\delta}$ وبالتالي فإن ممتد كوشي للإجهاد يكون على الصورة التالية

$$\underset{\sim}{\tau}=-p\underset{\sim}{\delta}+2\mu\underset{\sim}{e}-\frac{2}{3}\mu e_{kk}\underset{\sim}{\delta} \qquad (9)$$

و بأخذ$(\vec{\nabla}\cdot)$ (div) لطرفي المعادلة (9) نحصل على

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\tau}=-\vec{\nabla}\cdot\left(p\underset{\sim}{\delta}\right)+2\vec{\nabla}\cdot\left(\mu\underset{\sim}{e}\right)-\frac{2}{3}\vec{\nabla}\cdot\left(\mu e_{kk}\underset{\sim}{\delta}\right) \qquad (9a)$$

المعادلة (9a) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\tau}=-\vec{\nabla}p+2\vec{\nabla}\mu\cdot\underset{\sim}{e}+2\mu\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{e}-\frac{2}{3}\vec{\nabla}\left(\mu e_{kk}\right) \qquad (9b)$$

المعادلة (9b) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\tau}=-\vec{\nabla}p+2\vec{\nabla}\mu\cdot\underset{\sim}{e}+2\mu\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{e}-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}e_{kk}-\frac{2}{3}e_{kk}\vec{\nabla}\mu \qquad (9c)$$

ولكن

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{e}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\vec{v}+\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right)^{T}\right)=\frac{1}{2}\nabla^{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\nabla^{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}e_{kk} \qquad (9d)$$

بذلك تصبح المعادلة (9c) على الصورة

$$\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\tau}=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^{2}\vec{v}+2\vec{\nabla}\mu\cdot\underset{\sim}{e}+\frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}e_{kk}-\frac{2}{3}e_{kk}\vec{\nabla}\mu \qquad (10)$$

وبالتعويض من (10) في (6) نحصل على المعادلة الحاكمة لحركة الموائع اللزجة النيوتونية والقابلة للإنضغاط ومعامل لزوجتها متغيرة على الصورة التالية

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\vec{\nabla}p+\mu\nabla^{2}\vec{v}+2\vec{\nabla}\mu\cdot\underset{\sim}{e}+\frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}e_{kk}-\frac{2}{3}e_{kk}\vec{\nabla}\mu+\rho\vec{F} \qquad (11)$$

فإذا كان المائع اللزج النيوتوني قابل للإنضغاط ومعامل لزوجته ثابتة فإن المعادلة (11) تصبح على الصورة التالية

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3}\mu \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\right) + \rho \vec{F} \qquad (12)$$

وإذا كان المائع اللزج النيوتوني غيرقابل للإنضغاط ومعامل لزوجته ثابتة فإن المعادلة (12) تصبح على الصورة التالية

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{F} \qquad (13)$$

وإذا كان المائع غيرلزج وغير قابل للانضغاط فإن المعادلة (13) تصبح على الصورة التالية

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{F} \qquad (14)$$

والمعادلة (14) تمثل معادلة أويلر الحاكمة لحركة الموائع غير اللزجة (المثالية).

أثبت أن ممتد الإجهاد لمائع لزج وقابل للإنضغاط هو ممتد متماثل.

لإثبات أن ممتد الإجهاد لمائع لزج وقابل للإنضغاط هو ممتد متماثل نتبع الآتي

1- نأخذ حجم اختياري V من المائع اللزج والقابل للإنضغاط والمحاط بالسطح S ثم نأخذ منه عنصر حجمي δV والمحاط بعنصر السطح δS حيث $\hat{n}$ متجه وحدة عمودي للخارج على عنصر المساحة δS.

2- نفرض أن سرعة عنصر المائع الحجمي هي $\vec{v}$ وكثافته ρ عند أي نقطة P داخل المائع اللزج وعند اللحظة الزمنية t.

3- نفرض أن القوتين الداخلية والخارجية المؤثرة على عنصر المائع هما

أ- القوة الداخلية (القوة السطحية $\vec{\tau}_n$ الناشئة عن المائع المحيط بعنصر الحجم وهي قوة لوحدة المساحات)

ب- القوة الخارجية (القوة الحجمية) $\vec{F}$ لوحدة الكتل

وحيث أن القوة السطحية الناشئة عن المائع المحيط بعنصر الحجم هي $\vec{\tau}_n$ فإن محصلة عزوم القوى السطحية المؤثرة على المائع اللزج داخل الحجم V هي

$$\int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right) dS \qquad (1)$$

وحيث أن القوة الحجمية لوحدة الكتل هي $\vec{F}$ فإن محصلة عزوم القوى الحجمية المؤثرة على الحجم V تكون

$$\int_V \left(\vec{r} \wedge \rho \vec{F}\right) dV \qquad (2)$$

وحيث أن كمية حركة عنصر الحجم δV تكون $\rho \vec{v} \delta V$ فإن محصلة عزوم كمية حركة المائع داخل الحجم V تكون

$$\int_V \left(\vec{r} \wedge \rho \vec{v}\right) dV \qquad (3)$$

وطبقا لنظرية معدل التغير في عزم كمية الحركة نحصل على

$$\frac{D}{Dt}\int_V \left(\vec{r} \wedge \rho \vec{v}\right) dV = \int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right) dS + \int_V \left(\vec{r} \wedge \rho \vec{F}\right) dV \qquad (4)$$

وباستخدام نظرية رينولد للإنتقال تصبح المعادلة (4) على الصورة التالية

$$\int_V \left(\rho \vec{r} \wedge \frac{D\vec{v}}{Dt}\right) dV = \int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right) dS + \int_V \left(\vec{r} \wedge \rho \vec{F}\right) dV \qquad (5)$$

ولتحويل التكامل السطحي $\int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right) dS$ إلى تكامل حجمي نتبع الآتي

$$\int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right)_i dS = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{nk} dS = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l dS$$

وباستخدام نظرية جاوس للإنتشار تصبح المعادلة السابقة على الصورة التالية

$$\int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right)_i dS = \int_V \varepsilon_{ijk} \left(x_j \tau_{lk}\right)_{,l} dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \left(x_{j,l} \tau_{lk} + x_j \tau_{lk,l}\right)_{,l} dV$$
$$= \int_V \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{jl} \tau_{lk} + x_j \tau_{lk,l}\right)_{,l} dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk,l} dV$$

ويمكن صياغة المعادلة السابقة في الصورة الاتجاهية التالية

$$\int_S \left(\vec{r} \wedge \vec{\tau}_n\right) dS = \int_V \left[\vec{\tau}_1 + \vec{r} \wedge \left(\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau}\right)\right] dV \qquad (6)$$

حيث $\vec{\tau}_1 = \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} \hat{e}_i , \vec{r} \wedge \left(\vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau}\right) = \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk,l} \hat{e}_i$

وبالتعويض من (6) ,(5) في (4) نحصل على

$$\int_V \left[\vec{r} \wedge \left(\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau} - \rho \vec{F} \right) - \vec{\tau}_1 \right] dV = 0 \tag{7}$$

ولكن نعلم من معادلة الحركة للموائع اللزجة القابلة للإنضغاط في الصورة الإتجاهية أن

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{\tau} - \rho \vec{F} = \vec{0} \tag{8}$$

وبالتعويض من (8) في (7) نحصل على

$$\int_V \vec{\tau}_1 dV = \vec{0} \tag{9}$$

وحيث أن عنصر الحجم dV اختياري ولا يساوي صفر فإن $\vec{\tau}_1 = \vec{0}$ أي أن

$$\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0, \; i, j, k = 1,2,3$$

ومنها نجد أنه عندما $i = 1, j, k = 1,2,3$ فإن $\tau_{23} = \tau_{32}$ وعندما $i = 2, j, k = 1,2,3$ فإن $\tau_{13} = \tau_{31}$ وعندما $i = 3, j, k = 1,2,3$ فإن $\tau_{12} = \tau_{21}$ أي أن ممتد الإجهاد لمائع لزج قابل للإنضغاط ممتد متماثل

A fluid is being added constantly to a flow region with velocity field $\vec{v}$ at a rate q per unit volume per unit time. Show that the equation of motion becomes $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{T} + q\vec{v} + \rho \vec{F}$, where $\underset{\sim}{T}$ is the stress tensor and $\vec{F}$ the other body forces.

solution

The total moment of momentum of the fluid inside the volume V is

$$\int_V \rho \, \vec{r} \times \vec{V} \; dV,$$

where $\vec{r}$ is the position vector of the point P. Then the rate of change of moment of momentum of fluid within V is

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \, \vec{r} \times \vec{V} \; dV.$$

The moment of the body force $\vec{F}$ is

$$\int_V \rho\, \vec{r} \times \vec{F}\ dV,$$

where $\vec{F}$ is the body force per unit mass

The total moment of additional force, which is produced by additional flux per unit volume per unit time, is

$$\int_V q\, \vec{r} \times \vec{V}\ dV.$$

The total moment of the surface force is $\int_S \vec{r} \times (\square . \vec{n})\, dS$ and by Gauss theorem equals to

$$\int_V \vec{r} \times (\vec{\nabla} . \square)\, dV,$$

where **T**= -p δ + $\square$, p is the pressure, δ is unit tensor, $\square$ is the extra stress tensor and is a symmetric tensor .

Since the rate of change of moment of momentum is equal to the moment of applied force (both surface force and volume force), we get

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\, \vec{r} \times \vec{V}\ dV = \int_V \rho\, \vec{r} \times \vec{F}\ dV + \int_V q\, \vec{r} \times \vec{V}\ dV +$$

$$\int_V \vec{r} \times(\vec{\nabla} . \mathbf{T})\, dV,$$

or

$$\int_V \vec{r} \times [\frac{D}{Dt}\rho\vec{V} - \rho\, \vec{F} - q\, \vec{V} - \vec{\nabla} .\mathbf{T}]\, dV = 0.$$

Since the volume V is arbitrary and so the position vector $\vec{r}$, then the equation of motion becomes

$$\frac{D}{Dt}(\rho\vec{v}) - \rho\vec{F} - q\vec{V} - \vec{\nabla}.\mathbf{T} = 0.$$

For a constant density ρ, it can be written as

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} + \vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V}\right) = \rho\vec{F} + q\vec{V} + \vec{\nabla}.\mathrm{T}.$$

This is the called Navier-Stokes equation with additional constantly flux per unit volume per unit time.

Prove that $\frac{D}{Dt}\int_V(\rho\vec{r}\wedge\vec{v})dV = \int_V\left(\rho\vec{r}\wedge\frac{D\vec{v}}{Dt}\right)dV$, where ρ and $\vec{v}$ are density and velocity of a fluid.

Solution

From Reynolds transport theorem we know that

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} f(\vec{x},t)dV = \int_{V(t)}\left(\frac{Df(\vec{x},t)}{Dt} + f(\vec{x},t)\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)dV$$

By replacing $f(\vec{x},t)$ with $\rho\vec{r}\wedge\vec{v}$ we find that

$$\frac{D(\rho\vec{r}\wedge\vec{v})}{Dt} + (\rho\vec{r}\wedge\vec{v})\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)(\vec{r}\wedge\vec{v}) + \rho\vec{r}\wedge\frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Since $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ then the above equation becomes

$$\frac{D(\rho\vec{r}\wedge\vec{v})}{Dt} + (\rho\vec{r}\wedge\vec{v})\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \rho\vec{r}\wedge\frac{D\vec{v}}{Dt}, \text{ Hence}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V(\rho\vec{r}\wedge\vec{v})dV = \int_V\left(\rho\vec{r}\wedge\frac{D\vec{v}}{Dt}\right)dV$$

Show that the angular velocity vector $\underline{\Omega}$ of an incompressible viscous Newtonian fluid moving under no external forces satisfies the differential equation $\frac{D\underline{\Omega}}{Dt} = (\underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla})\underline{v} + \nu\nabla^2 \underline{\Omega}$, where ν is the kinematic viscosity.

Solution

Since, Navier-Stokes equation for an incompressible viscous fluid with constant viscosity is

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\nabla^2 \underline{v}, \tag{1}$$

$$\because \frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \underline{\varsigma} \times \underline{v}, \tag{2}$$

where

$$\underline{\varsigma} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = 2\underline{\Omega}. \tag{3}$$

From (2), (3) we can write (1) as the following form

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + 2\underline{\Omega} \times \underline{v} = -\underline{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\nabla^2 \underline{v}. \tag{4}$$

By taking the curl of (4), we get

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{\nabla} \times (\underline{\Omega} \times \underline{v}) = \nu\nabla^2 \underline{\Omega}. \tag{5}$$

$$\because \underline{\nabla} \times (\underline{\Omega} \times \underline{v}) = \underline{\Omega}(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) - \underline{v}(\underline{\nabla} \cdot \underline{\Omega}) + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{\Omega} - (\underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla})\underline{v}, \tag{6}$$

substitution from (6) in (5) we get

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \underline{\Omega}(\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) - \underline{v}(\underline{\nabla} \cdot \underline{\Omega}) + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla})\underline{\Omega} - (\underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla})\underline{v} = \nu\nabla^2 \underline{\Omega}, \tag{7}$$

since, we know from continuity equation that

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \tag{8}$$

Also, we know that

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{v}) = 0 \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \underline{\Omega} = 0 \qquad (9)$$

substitution from (8, 9) in (7) we get

$$\frac{D\underline{\Omega}}{Dt} = (\underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla})\underline{v} + \nu \nabla^2 \underline{\Omega}.$$

استنتج معادلة الدوامة لمائع ثابت اللزوجة وغير قابل للإنضغاط ويتحرك في عدم وجود قوة حجمية خارجية.

الحل

حيث أن المائع اللزج غير قابل للإنضغاط ولزوجته ثابتة فإن المعادلة الحاكمة لحركته في غياب القوة الحجمية الخارجية تكون على الصورة

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \vec{v} \qquad (1)$$

وحيث أن

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \vec{\zeta} \wedge \vec{v} \qquad (2)$$

حيث $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$. وبالتعويض من(2) في (1) نحصل على

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) + \vec{\zeta} \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2 \vec{v} \qquad (3)$$

وبأخذ$(\vec{\nabla} \wedge)$لطرفي المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{\zeta} \wedge \vec{v}) = \nu \nabla^2 \vec{\zeta} \qquad (4)$$

وحيث أن $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\zeta} \wedge \vec{v}) = \vec{\zeta}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\zeta}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\zeta} - (\vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ فإن (4) تصبح على الصورة

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \vec{\zeta}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) - \vec{v}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta}\right) + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\zeta} - \left(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \nu\nabla^2\vec{\zeta} \qquad (5)$$

ومن معادلة الإستمرارية نعلم أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$ وبصفة عامة نعلم أن $\vec{\nabla}\cdot\vec{\zeta} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right) = 0$ وبذلك تصبح (5) على الصورة التالية

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\zeta} - \left(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \nu\nabla^2\vec{\zeta} \qquad (6)$$

والمعادلة (6) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} = \left(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\zeta} \qquad (7)$$

والمعادلة (7) تعرف باسم معادلة الدوامة لمائع ثابت اللزوجة وغير قابل للإنضغاط ويتحرك في عدم وجود قوة حجمية خارجية.

<u>مثال</u>

أثبت أن $\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\psi = \frac{\partial\left(\psi, \nabla^2\psi\right)}{\partial(x, y)}$ حيث ψ دالة التيار لحركة مستوية لمائع لزج وذلك في غياب القوة الحجمية.

<u>الحل</u>

حيث أن معادلة الدوامة لمائع لزج وغير قابل للإنضغاط في غياب القوة الحجمية على الصورة

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} = \left(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\zeta} \qquad (1)$$

أو على الصورة

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\zeta}=\left(\vec{\zeta}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}+\nu\nabla^{2}\vec{\zeta} \qquad (2)$$

وحيث أن الحركة للمائع اللزج حركة مستوية ولتكن على الصورة

$$\vec{v}=\left(u,v,0\right) \qquad (3)$$

فإن

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (4)$$

وحيث أن العلاقة بين مركبتي السرعة ودالة التيار في الإحداثيات الكارتيزية هي

$$u=-\frac{\partial \psi}{\partial y},v=\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (5)$$

وبالتعويض من (5) في (4) نحصل على

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{v}=\nabla^{2}\psi\ \hat{k} \qquad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (2) نحصل على

$$\frac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial t}\hat{k}+\left(u\frac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial x}+v\frac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial y}\right)\hat{k}=\nu\nabla^{2}\left(\nabla^{2}\psi\right)\hat{k} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (5) في (7) نحصل على

$$\left(\nu\nabla^{2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\nabla^{2}\psi\right)=\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial x} \qquad (8)$$

المعادلة (8) يمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\nu\nabla^{2}-\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\nabla^{2}\psi\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial\left(\nabla^{2}\psi\right)}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial\left(\psi,\nabla^{2}\psi\right)}{\partial\left(x,y\right)}$$

<u>مثال</u>

أثبت أن الحركة المطردة الإنزلاقية البطيئة في بعدين لمائع نيوتوني لزج وغير قابل للإنضغاط تحقق المعادلة $\nu \nabla^4 \psi = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}$ حيث $\left(F_x, F_y\right)$ مركبتي القوة الخارجية المؤثرة على المائع، ψدالة التيار للمائع.

<u>الحل</u>

Since the flow in the creeping steady motion of a viscous incompressible fluid then Navier-Stokes equation becomes

$$\vec{\nabla} p = \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{F}\,, \tag{1}$$

Equation (1) can be rewritten as follows

$$\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{F}\,, \tag{2}$$

where $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. By taking the curl of equation (2) we get

$$\vec{0} = \nu \nabla^2 \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\right) + \vec{\nabla} \wedge \vec{F}\,, \tag{3}$$

Since the motion in two dimensions in x-y plane then

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \nabla^2 \psi\, \hat{k} \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\,, \tag{5}$$

Substituting from (4) and (5) in (3) we get

$$\nu \nabla^4 \psi = \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\,.$$