المحاضرة السادسة

تم دراسة خواص تحويل التعاكس فى المحاضرة السابقة

مثال:

تحت تأثير التحويل $w=\dfrac{1}{z}$ أوجد صورة كل مما يأتي:

(أ) الخط المستقيم $x = c$ حيث $c = 1, 0$، نصف المستوى $x > c$ حيث $c = 1, 0$.

(ب) الخطين المستقيمين المتعامدين $x + y - 2 = 0,\ x - y + 2 = 0$.

(ج) الدائرة $x^2 + (y-1)^2 = 1$

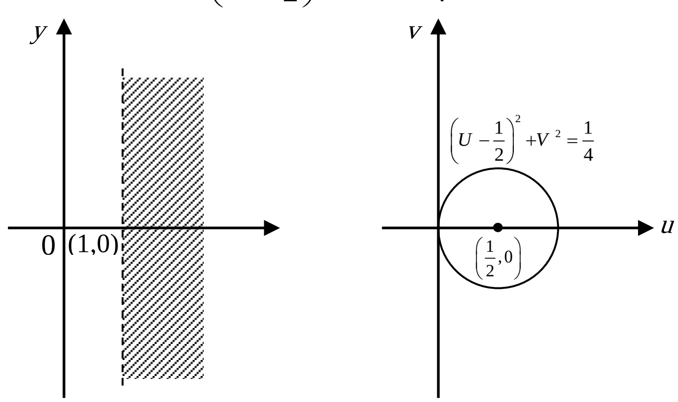
(د) الدائرة $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

الحل:

(أ) من (ii) نجد أن صورة المستقيم $x = c$ هي $\dfrac{U}{U^2+V^2}=c$.

الحالة الأولى:

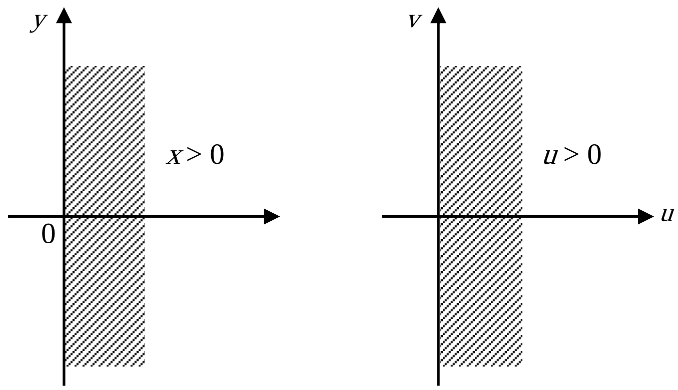
إذا كانت $c = 1$ فإننا نجد أن صورة المستقيم $x = 1$ هي الدائرة $\dfrac{U}{U^2+V^2}=1$ أو $U^2+V^2-U=0$ أو $\left(U-\dfrac{1}{2}\right)^2+V^2=\dfrac{1}{4}$ وبالتالي فإن صورة نصف المستوى $x > 1$ هي $\dfrac{U}{U^2+V^2}>1$ أو $U^2+V^2-U<0$ أو $\left(U-\dfrac{1}{2}\right)^2+V^2<\dfrac{1}{4}$ (أنظر الشكل)



أي أن صورة الخط المستقيم $x = 1$ هي الدائرة التي مركزها النقطة $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\dfrac{1}{2}$ التي تسمى محور الإحداثيات V عند نقطة الأصل وصورة نصف المستوى $x > 1$ تقع داخل هذه الدائرة.

الحالة الثانية:

إذا كانت $c = 0$ فإن صورة المستقيم $x = 0$ هي المستقيم $U = 0$ وصورة نصف المستوى $x > 0$ هي نصف المستوى $U > 0$.



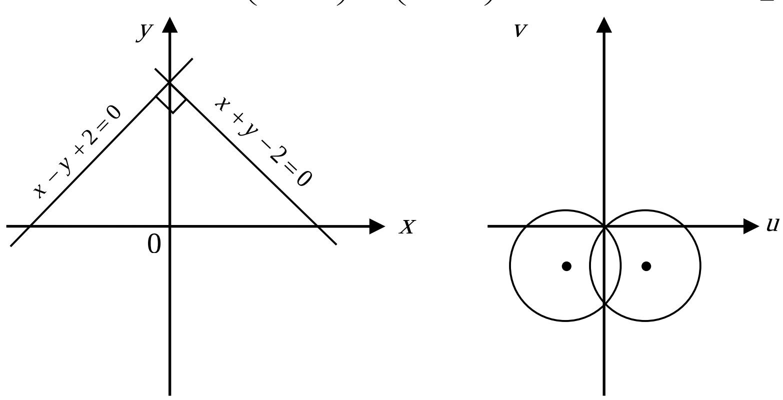
(ب) باستخدام (ii) نجد أن صورة المستقيم $x - y + 2 = 0$ هي الدائرة

$U + V + 2(U^2 + V^2) = 0$ أو $U^2 + V^2 + \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V = 0$

أو $\left(U + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(V + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$

وصورة المستقيم $x + y - 2 = 0$ هي الدائرة $U - V - 2(U^2 + V^2) = 0$

أو $U^2 + V^2 - \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V = 0$ أو $\left(U - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(V + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$



المستقيمان يتقاطعان على التعامد عند النقطة $z = 2i$ والدائرتان تتقاطعان على التعامد عن النقطتين $w = 0, w = \frac{-i}{2}$.

(ج) الدائرة $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ أو $x^2 + y^2 - 2y = 0$ هي دائرة مركزها (0, 1) ونصف قطرها 1 مارة بنقطة الأصل تنتقل إلى المستقيم $1 + 2V = 0$ أو $V = \frac{-1}{2}$.

(د) الدائرة $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ هي دائرة مركزها (-1, 2) ونصف قطرها 2 لا تمر بنقطة الأصل ويمكن كتابتها على الصورة $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ تنتقل إلى الدائرة $U^2 + V^2 + 2U + 4V + 1$

.= 0

التحويل ثنائي الخطية:

إذا كانت $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ أعداد مركبة ثابتة فإن:

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\quad \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \qquad (6)$$

تسمى بالتحويل ثنائي الخطية أو التحويل الخطي الكسري أو تحويل

الواضح أنه عندما $\gamma = 0$ فإن هذه التحويلة تصبح تحويلة خطية ولذلك سنفترض أن $\gamma \neq 0$ بنفس الطريقة التي اتبعت مع تحويل التعاكس فإن المعادلة (6) تحويلة واحد – إلى – واحد من المستوى الممتد على نفسه حيث $z=\frac{-\delta}{\gamma}$ تنقل إلى $w=\infty$ ، $z=\infty$ تنقل إلى $w=\frac{\alpha}{\gamma}$.

والتحويل ثنائية الخطية لها العديد من الخصائص الهامة نذكر منها ما يلي:

الخاصية الأولى:

تحت تأثير التحويل ثنائي الخطية تنقل الدوائر والخطوط المستقيمة إلى دائرة أو خطوط مستقيمة.

البرهان:

في بند (٢) وجدنا أن المعادلة (6) يمكن كتابتها على الصورة

أي أن التحويل ثنائي الخطية هو تحصيل التحويلات واحد – إلى – واحد الثلاثة الآتية:

$$w=\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{1}{\gamma z+\delta}$$

i.e. $\qquad \xi=\gamma z+\delta,\qquad \eta=\frac{1}{\xi},\qquad w=\frac{\alpha}{\delta}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\eta$

أي أن التحويل ثنائي الخطية هو محصلة لتحويل خطي ثم تحويل تعاكسي ثم تحويل خطي.

وحيث أن التحويل الخطي هو تحويل مطابق وتحويل التعاكس نقل الدوائر والخطوط المستقيمة إلى دوائر أو خطوط مستقيمة. إذن التحويل ثنائي الخطية ينقل الدوائر والخطوط المستقيمة إلى دوائر أو خطوط مستقيمة.

الخاصية الثانية:

التحويلة الكسرية الوحيدة التي تنقل أي ثلاث نقط مختلفة z_1, z_2, z_3 فوق ثلاث نقط مختلفة محددة w_1, w_2, w_3 على الترتيب على الصورة:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad (7)$$

البرهان:

إذا كان w_k يناظر z_k، $k= 1, 2, 3$

$$w-w_k=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}-\frac{\alpha z_k+\beta}{\gamma z_k+\delta}=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_k)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_k+\delta)}$$

وبالتالي

$$w-w_1=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_1)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_1+\delta)},\qquad w-w_3=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_3)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_3+\delta)}$$

وبإحلال w_2 بدلاً من w، z_2 بدلاً من z في (1) فنحصل على

$$w_2-w_1=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_2-z_1)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_1+\delta)},\qquad w_2-w_3=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_2-z_3)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_3+\delta)}$$

من (2) ,(1) وبفرض أن $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ نجد أن:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

<u>ملحوظات:</u>

(١) لأي تحويل ثنائي الخطية $T(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ حيث $T\left(-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)=\infty,\ T(\infty)=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ توجد معكوس $T^{-1}(z)$ على الصورة:

$$T^{-1}(z)=\frac{-\delta z+\beta}{\gamma z-\alpha},\quad T^{-1}(\infty)=\frac{-\delta}{\gamma},\quad T^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)=\infty$$

أي أن T^{-1} هي أيضاً تحويلة خطية ثنائية الخطية.

(٢) إذا كانت T, δ تحويلتين خطيتين كسريتين فإن محصلتهما $\delta[T(z)]$ تكون تحويلة خطية كسرية.

(٣) إذا كانت z_1, z_2, z_3, z_4 نقاط مختلفة فإن المقدار $\dfrac{(z_4-z_1)(z_2-z_3)}{(z_4-z_3)(z_2-z_1)}$ يسمى بالنسبة التبادلية للنقاط z_1, z_2, z_3, z_4 هذه النسبة ثابتة تحت تأثير التحويل الكسري.

(٤) **<u>تعريف: نقاط التحويل الثابتة:</u>**

يقال أن النقطة z_0 نقطة ثابتة للتحويل $w = f(z)$ إذا كانت $w_0 = f(z_0)$ والتحويل ثنائي الخطية له على الأكثر نقطتين ثابتتين هي $z=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

<u>مثال (١):</u>

أوجد النقط الثابتة للتحويل $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.

<u>الحل:</u>

النقاط الثابتة هي جذور المعادلة $z^2 + z = z - 1 \Leftarrow z = \pm i$.

مثال (٢):

أوجد التحويل الكسري الذي يحول النقاط $z = 0, 1, i$ على $w = -1, 0, i$ على الترتيب.

الحل:

بالتعويض في المعادلة (7) نحصل على:

$$\frac{(w+1)(0-i)}{(w-i)(0+i)} = \frac{(z-0)(1-i)}{(z-i)(1-0)}$$

أو

$$\frac{w+1}{w-i} = \frac{z(i+1)}{z-i}$$

ومنها نحصل على:

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

تمارين

(١) أوجد التحويل الكسري الذي يحول النقاط

(i) $z = 1, \infty, i$ إلى $w = i, 1, 1 + i$ على الترتيب

(ii) $z = -1, i, i + 1$ إلى $w = i, \infty, 1$ على الترتيب

(iii) $z = -1, \infty, i$ إلى $w = \infty, i, 1$ على الترتيب

(iv) $z = -1, i, i + 1$ إلى $w = 0, 2i, 1 - i$ على الترتيب.

تحويل القوى: **The Power Transformation**

التحويل

$$w = z^n, \qquad n = 2,3,4,\ldots \qquad (8)$$

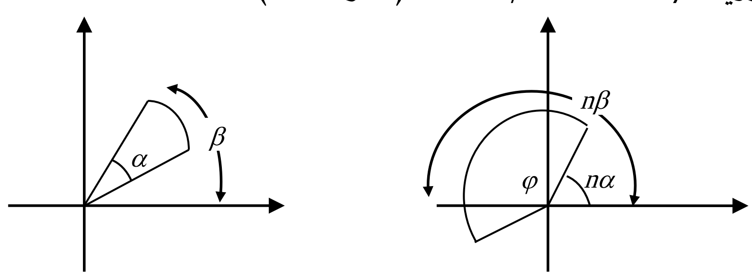
يسمى تحويل القوى وغالبية خواص هذا التحويل يمكن دراستها باستخدام الإحداثيات القطبية.

إذا كانت $z = re^{i\theta}$ فإن $w = r^n e^{in\theta}$

أي أن $|w| = r^n, \quad \arg w = n\theta$.

وهذا يعني أنه تحت تأثير تحويل القوى، النقطة z التي مقياسها r وسعتها θ تنتقل إلى نقطة قياسها r^n وسعتها $n\theta$.

وعلى سبيل المثال تحت تأثير التحويل $w = z^3$، النقطة $z = 2e^{iI_2}$ تنتقل إلى النقطة $w = 8e^{i3I_2}$. وبصفة عامة ينقل الشعاع الذي رأسه نقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب للمحور الحقيقي زاوية α أي أن الشعاع رأسه نقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية مقدارها $n\alpha$. أيضاً أي قطاع دائري مركزه نقطة الأصل ونصف قطره r وزاويته $\alpha \le \theta \le \beta$ إلى قطاع دائري مركزه نقطة الأصل ونصف قطره r^n وزاويته $n\alpha \le \varphi_0 = n\theta_0 \le n\beta$. (أنظر الشكل).



أيضاً المستوى Z ينقل على المستوى W عدد n من المرات، أي أن كل نقطة $w \ne 0$ في المستوى W هي صورة n من نقاط المستوى Z المختلفة.

مثال (١):

تحت تأثير التحويل $w = z^2$، أوجد صورة كل مما يأتي:

(أ) القطع الزائدي $x^2 - y^2 = c$، القطع الزائدي $2xy = k$،

المنطقة $x > 0, y > 0, xy < 1$.

(ب) المنطقة $r \ge 0, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، المنطقة $r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi$.

الحل:

(أ) بدلالة الإحداثيات الكرتيزية تكون التحويلة $w = z^2$ هي

$$U + iV = x^2 - y^2 + 2ixy$$

أي أن

$$U = x^2 - y^2, \quad V = 2xy$$

وبالتالي فإن صورة القطع الزائد $x^2 - y^2 = c$ تكون الخط المستقيم $U = c$

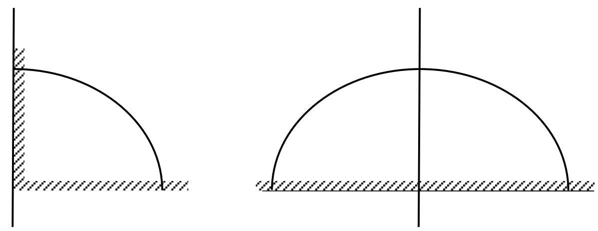
كما أن صورة القطع الزائد $2xy = k$ فوق الخط المستقيم $V = 1$

بدلالة الإحداثيات القطبية، إذا كان $z = re^{i\theta}$ ، $w = \rho e^{i\varphi}$

فإن: $$\rho e^{i\varphi} = r^2 e^{2i\theta}$$

أي أن: $$|w| = |z|^2, \quad \arg w = 2\arg z$$

وهذه التحويلة تكون راسماً أحادياً من الربع الأول $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ من المستوى المركب Z فوق نصف المستوى $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$ من المستوى المركب W. (أنظر الشكل)

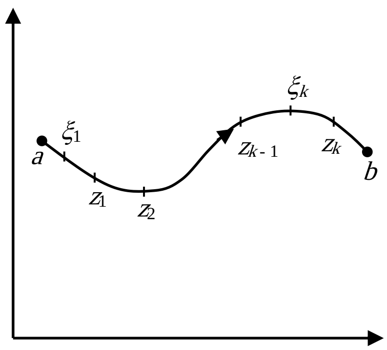


كذلك فإنها تكون راسماً من نصف المستوى العلوي $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi$ من المستوى المركب Z فوق المستوى المركب W بأكمله.

ولكن يجب ملاحظة أنه في هذه الحالة لا تكون التحويلة أحادية وذلك حيث أن كلاً من الجزء الموجب والجزء السالب من المحور الحقيقي في المستوى المركب Z يرسم فوق الجزء الموجب من المحور الحقيقي في المستوى المركب W.

تكامل الدوال المركبة ونظرية كوشي

بند (١): التكاملات الخطية للدوال المركبة:



شكل (١−٥)

لتكن $f\ (z)$ دالة متصلة عند كل نقاط منحنى ما C (شكل٥−١) والذي سنفرض أنه محدود الطول.

نقسم المنحنى C إلى n من الأجزاء بالنقاط $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ ولا توجد قيود على هذا الاختيار.

على قوس يصل $a = z_0, b = z_n$ z_{k-1} إلى z_k (حيث k تأخذ القيم من 1 إلى n) نختار نقطة ما ξ تكون المجموع

$$S_n = f\ (\xi_1)(z_1 - a) + f\ (\xi_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f\ (\xi_n)(b - z_{n-1})$$

بكتابة $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$ فإن المجموع يصبح

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\ (\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f\ (\xi_k)\Delta z_k \qquad (2)$$

ولنعتبر أن عدد الأقسام n يزداد بحيث يقترب أكبر طول من أطوال الأوتار $|\Delta z_k|$ من الصفر وبالتالي يقترب المجموع S_n من نهاية لا تعتمد على طريقة تقسيم المنحنى ونرمز لهذه النهاية بالرمز

$$\int_C f\ (z)dz \qquad or \qquad \int_a^b f\ (z)dz \qquad (3)$$

ويسمى بالتكامل الخطي لدالة مركبة أو باختصار التكامل الخطي للدالة $f\ (z)$ على المنحنى C أو التكامل المعين للدالة $f\ (z)$ من a إلى b على المنحنى C.

في هذه الحالة يقال أن $f\ (z)$ قابة للتكامل على المنحنى C.

لاحظ أن $f\ (z)$ تحليلية عند كل نقاط المنطقة R وإذا كان C هو منحنى ما يقع في R فإن $f\ (z)$ بالتأكيد قابلة للتكامل على المحنى C.

<u>التكاملات الخطية للدوال الحقيقية:</u>

إذا كانت $P(x, y), Q(x, y)$ دالتين حقيقيتين في كل من x, y ومتصلتين عند كل نقاط المنحنى C فإنه يمكن تعريف التكامل الخطي للدوال الحقيقية $Pdx + Qdy$ على المنحنى C بطريقة مماثلة كالتي أعطيت سابقاً ويرمز لها بالرمز

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad or \quad \int_C Pdx + Qdy \qquad (4)$$

ويستخدم الرمز الثاني للاختصار.

إذا كان C منحنى أملس له المعادلتان البارامتريتان $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ حيث $t_1 \le t \le t_2$ فإن قيمة (4) تعطى بالآتي:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[P\{\phi(t),\psi(t)\}\phi'(t)dt + Q\{\phi(t),\psi(t)\}\psi'(t)dt\right]$$

ويمكن عمل تعديلات مناسبة إذا كان المنحنى C أملس في أجزاء.

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة $\int_{(0,3)}^{(2,4)}\left(2y + x^2\right)dx + (3x - y)dy$ على:

(أ) القطع المكافئ $y = t + 3,\ x = 2t$.

(ب) الخطين المستقيمين من (0, 30) إلى (2, 3) ومن (2, 3) إلى (2, 4).

(ج) الخط المستقيم من (0, 3) إلى (2, 4).

<u>الحل:</u>

(أ) النقطتان (2, 4), (0, 3) على القطع المكافئ تناظران $t = 1,\ t = 0$ على الترتيب. فإن التكامل الخطي يساوي

$$\int_{t-3}^{1}\left\{2\left(t^2+3\right)+(2t)^2\right\}2dt + \left\{3(2t)-\left(t^2+3\right)\right\}2tdt$$

$$= \int_0^1\left(24t^2 + 12 - 2t^3 - 6t\right)dt = 3312$$

(ب) على الخط المستقيم من (0, 3) إلى (2, 3) أي $dy = 0,\ y = 3$ فإن التكامل الخطي يساوي

$$\int_{x=0}^{2}\left(6+x^2\right)dx + (3x-3)0 = \int_0^2\left(6+x^2\right)dx = \frac{44}{3}$$

وعلى الخط المستقيم من (2, 3) إلى (2, 4) أي $dx = 0,\ x = 2$ فإن التكامل الخطي يساوي

$$\int_{y=3}^{4}(2y+4)0 + (6-y)dy = \int_3^4(6-y)dy = \frac{5}{2}$$

القيمة المطلوبة $\frac{44}{3} + \frac{5}{2} = \frac{103}{6}$.

(ج) معادلة الخط المستقيم الذي يصل النقطتان (2, 4), (0, 3) على $2y - x = 6$

بحلها بالنسبة لـ x نحصل على $x = 2y - 6$ وعلى ذلك فإن التكامل الخطي يساوي

$$\int_{y=3}^{4}\left\{2y+(2y-6)^2\right\}dy+\left\{3(2y-6)-y\right\}dy$$

$$=\int_{3}^{4}\left(8y^2-39y+54\right)dy=\frac{97}{6}.$$

ويمكن أن نحصل على نفس النتيجة باستخدام $y=\frac{1}{2}(x+6)$.