المحاضرة ٦

طرق التكامل:

١. التكامل بالتجزئ:

بفرض ان $u(x)$، $v(x)$ دالتين قابلتين للتفاضل فان:

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

وتسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل بالتجزئ. اذا كان التكامل محدد تأخذ الصورة

$$\int_a^b u(x)dv = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du$$

أول نوع من هذه الطريقة:

الدوال التى على الصورة $\int x^n e^x dx$ أو الدوال التى فى الصورة $\int x^n sinxdx$أو $\int x^n cosxdx$ فنأخذ $u(x) = x^n$ و $dv = e^x$ أو $dv = sinx$ او $dv = cosx$ على حسب المسالة.

مثال١: اوجد تكامل الدالة الاتية:

$$\int x^2 sinxdx$$

الحل: بأخذ $u(x) = x^2$ و $dv = sinx$ ثم نحسب $du = 2xdx$ و $v = \int dv =$ $\int sinxdx = -cosx$ بالتعويض فى القانون نحصل على:

$$\int x^2 sinxdx = u(x)v(x) - \int v(x)du = -x^2 cosx - \int -2xcosxdx$$

$$= -x^2 cosx + 2I \qquad (1)$$

حيث $I = \int xcosxdx$ نلاحظ أن هذا التكامل نحسبه ايضا باستخدام التكامل بالتجزئ :

بأخذ $u(x) = x$ و $dv = cosx$ ثم نحسب $du = dx$ و $v = \int dv = \int cosxdx = sinx$ بالتعويض فى القانون نحصل على:

$$I = \int xcosxdx = xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + c$$

المحاضرة ٦

وبالتعويض عن قيمة I فى المعادلة (١) نحصل على

$$\int x^2 sinxdx = -x^2 cosx + 2xsinx + 2cosx + c$$

مثال٢:

أوجد تكامل الدوال الاتية:

$1.\ \int x^2 cosxdx$, $2.\ \int x^2 e^{2x} dx$

ثانى نوع من هذه الطريقة:

الدوال التى على الصورة $\int x^n lnxdx$ فنأخذ $u(x) = lnx$ و $dv = x^n$.

مثال٣: اوجد تكامل الدالة الاتية:

$$\int x^2 lnxdx$$

الحل: بأخذ $u(x) = lnx$ و $dv = x^2$ ثم نحسب $du = \frac{dx}{x}$ و $v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ بالتعويض فى القانون نحصل على:

$$\int x^2 lnxdx = u(x)v(x) - \int v(x)du = \frac{x^3}{3} lnx - \int \left(\frac{x^3}{3}\right)\frac{dx}{x} = \int \left(\frac{x^2}{3}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{9} + c$$

مثال٤:

أوجد تكامل الدوال الاتية:

$1.\ \int xlnxdx$, $2.\ \int lnxdx$

المحاضرة ٦

<u>ثالث نوع من هذه الطريقة:</u>

الدوال التى على الصورة $\int x^n tan^{-1}xdx$ أو الدوال التى فى الصورة $\int x^n sin^{-1}xdx$ أو $\int x^n tanh^{-1}xdx$ والدوال المثلثية العكسية والزائدية العكسية فنأخذ $u(x) = sin^{-1}$ و $dv =$ x^n على حسب المسالة.

<u>مثال٥:</u> اوجد تكامل الدالة الاتية:

$$\int xsec^{-1}xdx$$

<u>الحل:</u> بأخذ $u(x) = sec^{-1}x$ و $dv = x$ ثم نحسب $du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ و $v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ بالتعويض فى القانون نحصل على:

$$\int xsec^{-1}xdx = u(x)v(x) - \int v(x)du = \frac{x^2}{2}sec^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2}{2}sec^{-1}x - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x^2}{2}sec^{-1}x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + \mathrm{c}$$

<u>مثال٦:</u>

أوجد تكامل الدوال الاتية:

1. $\int x^2 cot^{-1}xdx$ 2. $\int xcosh^{-1}xdx$

<u>رابع نوع من هذه الطريقة:</u> الدوال التى على الصورة $\int e^x sinxdx$ أو الدوال التى فى الصورة $\int e^x sinxdx$ فنأخذ $u(x) = sinx$ و $dv = e^x$ أو $u(x) = e^x$ و $dv = sinx$ فى هذا التكامل نستخدم التكامل بالتجزئ مرتين

المحاضرة ٦

مثال٧: اوجد تكامل الدالة الاتية:

$$\int e^x sinxdx$$

الحل: بأخذ $u(x) = sinx$ و $dv = e^x$ ثم نحسب $du = cosx$ و $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$ بالتعويض فى القانون نحصل على:

$$I = \int e^x sinxdx = u(x)v(x) - \int v(x)du = e^x sinx - \int e^x cosxdx$$

$$= e^x sinx - I_1 \qquad (2)$$

حيث $I_1 = \int e^x cosxdx$ نلاحظ أن هذا التكامل نحسبه ايضا باستخدام التكامل بالتجزئ :

بأخذ $u(x) = cosx$ و $dv = e^x$ ثم نحسب $du = -sinx$ و $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$ بالتعويض فى القانون نحصل على:

$$I_1 = \int e^x cosxdx = e^x cosx + \int e^x sinxdx$$

وبالتعويض عن قيمة I_1 فى المعادلة (2) نحصل على

$$\int e^x sinxdx = e^x sinx - e^x cosx - \int e^x sinxdx$$

$$\therefore 2\int e^x sinxdx = e^x sinx - e^x cosx + c$$

أنواع أخرى:

مثال٨: اوجد تكامل الدالة الاتية:

$$\int cos\sqrt{x}dx$$

الحل:اولا نأخذ التعويضة $t = \sqrt{x} \Leftarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ثم بالتعويض فى التكامل فيصبح الكامل فى الصورة الاتية

المحاضرة ٦

$$2\int t\cos t\,dt = 2tsin\,t - 2\int \sin t\,dx \ = 2tsin\,t + 2cost + c$$

$$\int cos\sqrt{x}dx = 2\sqrt{x}sin\,\sqrt{x} + 2cos\sqrt{x} + c$$