

المحاضرة السابعة : طرق التكامل:

١. التكامل باستخدام الكسور الجزئية:

تستخدم الكسور الجزئية لإعادة كتابة الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ كمجموع من الكسور الأيسر وبالتالي يتحول

التكامل $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ إلى مجموع عدد من التكاملات الأيسر والأسهل في التعامل.

قواعد تحليل الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ إلى كسور جزئية:

الحالة الأولى: درجة $p(x)$ أقل من درجة $Q(x)$:

١- كل عامل خطي $(ax + b)$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئي :

$$\frac{\alpha}{ax + b}$$

حيث α مقدار ثابت.

٢- كل عامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل $(ax^2 + bx + c)$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئي:

$$\frac{ax + \beta}{ax^2 + bx + c}$$

حيث α, β مقادير ثابتة.

٣- كل عامل خطي مكرر $(ax + b)^2$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسران جزئيان:

$$\frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta}{(ax + b)^2}$$

حيث α, β مقادير ثابتة.

٤- كل عامل مكرر من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل $(ax^2 + bx + c)^2$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسران جزئيان:

المحاضرة ٧

$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{(ax^2 + bx + c)^2}$$

حيث $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ مقادير ثابتة.

٥- كل عامل خطي مكرر ثلاث مرات $(ax + b)^3$ للدالة $Q(x)$ يقابله ثلاث كسور جزئية:

$$\frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta}{(ax + b)^2} + \frac{\gamma}{(ax + b)^3}$$

حيث α, β, γ مقادير ثابتة.

الحالة الثانية: درجة $p(x)$ أكبر من او تساوى درجة $Q(x)$:

١- إذا كانت درجة $p(x)$ تساوى درجة $Q(x)$ فاننا نضيف ثابت α الى الكسور الجزئية الموجودة فى الحالة الاولى.

٢- إذا كانت درجة $p(x)$ أعلى بمقدار درجة واحدة من درجة $Q(x)$ فاننا نضيف المقدار $\alpha x + \beta$ الى الكسور الجزئية الموجودة فى الحالة الاولى.

٣- إذا كانت درجة $p(x)$ أعلى بمقدار درجتين من درجة $Q(x)$ فاننا نضيف المقدار $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ الى الكسور الجزئية الموجودة فى الحالة الاولى.

أو استخدام القسمة المطولة.

طرق تعيين الثوابت:

تساوى الكسر $\frac{p(x)}{Q(x)}$ بمجموع الكسور الجزئية المقابلة له كما سبق الحصول عليها ثم نضرب المتساوية فى $Q(x)$ وبذلك نحصل على متساوية جديدة . يمكن عندئذ الحصول على الثوابت من هذه المتساوية الجديدة وذلك باستخدام الطرق الاتية:

١- نعطي قيمة مناسبة للمتغير x .

٢- نساوى المعادلات المتناظرة فى الطرفين مع البدء بالحدود المشتملة على أعلى قوة للمتغير x .

مثال ١: أوجد قيمة:

المحاضرة ٧

$$\int \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)} dx$$

الحل: نستخدم الكسور الجزئية أولاً ثم نحسب ناتج التكامل :
درجة البسط اقل من درجة المقام لذلك نستخدم الحالة الاولى كما ان x^2 قوس مكرر مرتين من الدرجة الاولى:

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)} &= \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x - 1} \\ &= \frac{a(x - 1) + bx(x - 1) + cx^2}{x^2(x - 1)} \end{aligned}$$

بضرب الطرفين في المقدم $x^2(x - 1)$ نحصل على

$$2x - 1 = a(x - 1) + bx(x - 1) + cx^2 \quad (1)$$

لحساب الثوابت:

بوضع $x = 1$ في المعادلة (1) نحصل على $c = 1$

بوضع $x = 0$ في المعادلة (1) نحصل على $a = 1$

بمساواة معاملات x^2 نحصل على $b = -1$ $\rightarrow b + c = 0$

مما سبق نحصل على

$$\begin{aligned} \int \frac{2x - 1}{x^2(x - 1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x - 1} = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \ln|x - 1| + c \end{aligned}$$

مثال ٢:

$$I = \int \frac{dx}{x(x - 1)}$$

الحل: بتحليل الكسر الى كسور جزئية نحصل على:

$$\frac{1}{x(x - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1}$$

ومن ثم

$$I = \int \frac{dx}{x(x - 1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1} \right) dx$$

المحاضرة ٧

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -\ln(x) + \ln(x-1) + c \\ &= \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + c \end{aligned}$$

مثال ٣: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

الحل: بتحليل الكسر الى كسور جزئية نحصل على:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) + c \end{aligned}$$

مثال ٤: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{(x+5)}{x^2 + x - 2} dx$$

الحل: بتحليل الكسر الى كسور جزئية نحصل على:

$$\frac{(x+5)}{(x+2)(x-1)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$$

وبالتالى

$$I = \int \frac{x+5}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

المحاضرة ٧

$$\begin{aligned} &= - \int \frac{1}{x+2} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\ln(x+2) + 2\ln(x-1) + c \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x+2}\right) + c \end{aligned}$$

مثال ٥: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2(1+x)} dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4}{x^2(1+x)} dx + \int \frac{x+1}{x^2(1+x)} dx \\ &= \int \frac{x^2}{(1+x)} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int \frac{(x+1-1)^2}{(1+x)} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{(1+x)} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int (x+1) dx - 2 \int dx + \int \frac{1}{(1+x)} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} - 2x + \ln(x+1) - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

المحاضرة ٧

التعويضات الكسرية:

بعض المقادير الكاملة يمكن أن تتحول إلى مقادير كسرية يمكن تكاملها باستخدام الكسور الجزئية أو الطرق الأخرى، وخاصة إذا كانت تحتوي على مقدار على الصورة $(a + bx)^{\frac{1}{n}}$ حيث a, b ثوابت فإننا نستخدم التعويضة $u = (a + bx)^{\frac{1}{n}}$ كما في الأمثلة الآتية:

مثال ١:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

الحل:

$$u = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow u^2 = x^2 - 4 \quad 2udu = 2xdx \quad \text{نضع}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx \\ &= \int \frac{(u^2 + 4)u}{u} du = \int (u^2 + 4) du = \frac{u^3}{3} + 4u + c \\ \therefore I &= \frac{1}{3} u(u^2 + 12) + c = \frac{1}{3} (x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + c \end{aligned}$$

مثال ٢:

$$I = \int \frac{1}{(x + 2)\sqrt{x + 1}} dx$$

الحل:

سنحاول التخلص من الجذر التربيعي باستخدام التعويض:

$$u = \sqrt{x + 1} \Rightarrow u^2 = x + 1, \quad x = u^2 - 1 \quad 2udu = dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x + 2)\sqrt{x + 1}} dx = \int \frac{2udu}{(u^2 + 1)u} = \int \frac{2du}{(u^2 + 1)} \\ &= 2 \tan^{-1} u + c = 2 \tan^{-1} \sqrt{x + 1} + c. \end{aligned}$$

مثال ٣: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

الحل: بوضع $u = \sqrt{x+1}$ نجد ان $u^2 = x+1$ ومن ثم

$$2udu = dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{u}{u^2-1} 2udu$$

$$= 2 \int \frac{u^2}{u^2-1} du = 2 \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1} du$$

$$= \int \left(2 + \frac{2}{u^2-1} \right) du$$

$$= \int \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= 2u + \ln(u-1) - \ln(u+1) + c$$

$$= 2u + \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + c$$

$$= 2\sqrt{x+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right) + c$$

مثال ٤: احسب التكامل:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$$

الحل: بوضع $x = u^6$ نجد ان $dx = 6u^5$ ومن ثم

$$I = \int \frac{1}{u^3 - u^2} 6u^5 du = 6 \int \frac{u^3}{u-1} du$$

المحاضرة ٧

$$\begin{aligned} &= 6 \int \left(\frac{(u^3 - 1) + 1}{u - 1} \right) du \\ &= 6 \int \left(\frac{(u - 1)(u^2 + u + 1) + 1}{u - 1} \right) du \\ &= 6 \left(\int (u^2 + u + 1) du + \int \frac{1}{u - 1} du \right) \\ &= 6 \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln(u - 1) \right) + c \\ &= 6 \left[\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln(\sqrt[6]{x} - 1) \right] + c \end{aligned}$$

تمارين:

أوجد التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$
2. $\int \frac{x^3}{x^3 + 1} dx$
3. $\int \frac{1}{x + \sqrt{x} - 1} dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$