الفصل العاشر

طرق التكامل

Methods of Integration

1.10 التكامل بالتجزيء Integration by Parts

من أهم طرق التكامل وأكثرها استعمالاً، هي طريقة التكامل بالتجزيء، ويتم اشتقاق هذه الطريقة من قانون المشتقة الأولى لحاصل الضرب.

$$d(uv) = u\,dv + v du$$

بتكامل الطرفين نحصل على:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

أو

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثـال 1

أوجد $\int xe^x dx$.

الحـل

نضع $u = x$ ، $dv = e^x dx$

ومن ذلك نجد أن $du = dx$ و $v = \int e^x dx = e^x$

إذن

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

مثال 2

أوجد $\int \ln x dx$.

الحل

نضع $u = \ln x$ ، $dv = dx$ ومن ذلك نجد أن

$$v = \int dx = x\ ,\ du = \frac{1}{x} dx$$

إذن

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$
$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

في معظم الحالات التي تحتوي على $\log_a x$، نأخذ $u = \log_a x$.

لاختيار u وdv، نراعي ما يلي:

1) لا بد من وجود $\int dv$.

2) $\int v\, du$ يجب أن يكون أسهل من $\int u\, dv$.

مثال 3

أوجد $\int e^x \sin x\, dx$.

الحـــل

لنفرض أن $u = e^x \Leftarrow du = e^x dx$

و $dv = \sin x \, dx \Leftarrow v = -\cos x$

إذن $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$

الآن نجد

$\int e^x \cos x \, dx$ بطريقة التجزيء مرة أخرى، بفرض أن $u = e^x$ و $dv = \cos x \, dx$

وبالتالي

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

إذن $$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

إذن $$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

مثـــال 4

أوجد $\int \sec^3 x dx$.

الحـــل

لنفرض أن $u = \sec x \Leftarrow du = \sec x \tan x \, dx$

و $dv = \sec^2 x dx \Leftarrow v = \tan x$

إذن

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x dx \\ &= \tan x \sec x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x \, dx\end{aligned}$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\tan x \sec x + \int \sec x dx) + C$$

تمارين 1.10

أوجد التكاملات التالية:

(1 $\int xe^{3x}dx$

(2 $\int x^2 \ln x dx$

(3 $\int_0^{\pi/2} x\sin x \, dx$

(4 $\int x^{5x}dx$

(5 $\int e^{3x}\sin(2x)dx$

(6 $\int \sin^4 x dx$

(7 $\int x \sinh(x)dx$

(8 $\int \cos(\ln x)dx$

(9 $\int x^3 e^{2x} dx$

(10 $\int e^{-x}\cos(2x)dx$

2.10 تكامل بعض الدوال المثلثية

(أ) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ عندما يكون m أو n عدداً صحيحاً فردياً.

1) عندما يكون m عدداً فردياً، فإننا نعوض عن $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

2) عندما يكون n عدداً فردياً، فإننا نعوض عن $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

مثـــال 5

أوجد $\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx$.

الحـــل

حيث أن m عدد فردي فإن التعويض المطلوب هو $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x \cos^{1/2} x dx$$

$$= \int \sin x \cos^{1/2} x dx - \int \sin x \cos^{5/2} x dx$$

لنفرض أن $u = \cos x$

إذن $\frac{du}{dx} = -\sin x$

$$\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx = -\int u^{1/2} du + \int u^{5/2} du$$

$$= -\frac{2}{3} u^{3/2} + \frac{2}{7} u^{7/2} + C$$

$$= -\frac{2}{3} \cos^{3/2} x + \frac{2}{7} \cos^{7/2} x + C$$

ملاحظة :

$$\int \sin^3 x \cos^{1/2} x dx = \int \sin^2 x \cos^{1/2} x \, d(\cos x)$$
$$= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^{\frac{1}{2}} x \, d(\cos x)$$

$$= -\int \cos^{\frac{1}{2}} x d(\cos x\ ) + \int \cos^{\frac{5}{2}} x d(\cos x\ )$$

$$= -\frac{2}{3}\cos^{3/2} x + \frac{2}{7}\cos^{7/2} x + C$$

(ب) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ عندما يكون m و n عددين زوجيين.

في هذه الحالة، نعوض عن

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{و} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

مثال 6

أوجد $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

الحل

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx+\int \cos 2x dx-\int \cos^2 2x dx-\int \cos^3 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx\right.$$

$$\left.-\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx\right)$$

$$= \frac{1}{16}x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x$$

$$-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

(ج) $\int \tan^n x dx$.

لإيجاد هذا التكامل، نستخدم التعويض التالي :

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

مثـــال 7

أوجد $\int x\tan^2 x dx$.

الحـــل

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx$$
$$= \tan x \ + x + C$$

مثـــال 8

أوجد $\int \tan^3 x dx$.

الحـــل

$$\int \tan^3 x dx = \int \tan x \, \tan^2 x dx = \int \tan x \, (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan x \, \sec^2 x dx - \int \tan x \, dx$$

لإيجاد $\int \tan^2 x \, \sec^2$ ، نفترض أن $u = \tan x$ ، ومنها $du = \sec^2 x dx$

إذن $\int \tan x \, \sec^2 x dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C_1 = \frac{1}{2} \tan^2 x + C_1$

ولإيجاد $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ ، نقوم بالتعويض التالي $u = \cos x$ ، ومنها $du = -\sin x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C_2 = -\ln |\cos x \,| + C_2$$

إذن $\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x \,| + C$

حيث $C = C_1 + C_2$.

(د) $\int \sec^n x dx$.

لإيجاد هذا التكامل، نستخدم التعويض التالي:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

مثــال 9

أوجد $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx$.

الحــل

$$\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x(1 + \tan^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^2 x \, dx$$

$$= \tan x \Big|_0^{\pi/4} + \tfrac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0\right) + \frac{1}{3}\left(\tan^3 \frac{\pi}{4} - \tan^3 0\right)$$

$$= (1 - 0) + \frac{1}{3}(1 - 0) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

ملاحظة

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x d(\tan x) = \frac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\pi/4}$$

(هـ) $\int \tan^m x \sec^n x dx$ حيث إن n عدد زوجي.

استخدم التعويض التالي: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

مثــال 10

أوجد $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x \, dx$.

الحــل

$$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^2 x(1+\tan^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/3} \tan^7 x \sec^2 x \, dx$$

نفترض أن $u = \tan x$، ومن ذلك $du = \sec^2 x dx$.

إذن

$$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x dx = \frac{1}{6}\tan^6 x\Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\tan^8 x\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(\sqrt{3})^6 - 0\right] + \frac{1}{8}\left[(\sqrt{3})^8 - 0\right]$$

$$= \frac{1}{6}(27) + \frac{1}{8} = \frac{9}{2} + \frac{81}{8} = \frac{117}{8}$$

ملاحظة

$$\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x(1+\sec^2 dx(\tan x)$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^5 x(1+\tan^2 x)d(\tan x)$$

$$= \frac{1}{6}\tan \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\tan^8 x\Big|_0^{\pi/3}$$

(و) $\int \tan^m x \sec^n$ حيث أن n و m عددان فرديان.

استخدم الحد $\sec x \tan x$ لأن $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

وعوّض عن $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

مثـال 11

أوجد $\int_0^{\pi/3} \tan^3 x \sec^5 x dx$.

الحـل

$$\int \tan^3 x \sec^5 x dx = \int \tan x \sec x (\sec^2 x - 1) \sec^4 x dx$$

$$= \int \sec^6 x \tan x \sec x dx - \int \sec^4 x \tan x \sec x dx$$

نفترض أن $u = \sec x$، ومن ذلك $du = \sec x \tan x \, dx$.

إذن

$$\int \tan^3 x \sec^5 x dx = \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

تمارين 2.10

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

2) $\int \sin^{1/2} x \cos^3 x dx$

3) $\int \sec^3 5x dx$

4) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

5) $\int_0^{\pi/6} \sec^3 2x \tan 2x dx$

6) $\int_0^{\pi/4} \sec^3 2x \tan^3 2x dx$

7) $\int_0^{\pi/8} \tan^2 2x dx$.

8) $\int (\sec (3x) + \tan (3x))^2 dx$.

9) $\int \sqrt{\tan (7x)} \sec^4 (7x) dx$.

10) $\int x^2 \tan^5 (x^4) \sec^7 (4x) dx$.

3.10 تكامل الدالة القياسية (طريقة الكسور الجزئية)

إذا كانت $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ عندما تكون $p(x)$ و$q(x)$ كثيرتي حدود، فإن الدالة $f(x)$ تسمى دالة قياسية.

من أجل تكامل مثل هذه الدوال، نفترض الحالتين الآتيتين، وهما:

1) إذا كانت درجة $p(x)$ أكبر من درجة $q(x)$، نقوم بعملية قسمة مطولة للحصول على $\dfrac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\dfrac{t(x)}{q(x)}$

حيث $s(x)$ كثيرة حدود بدرجة أقل من درجة $q(x)$.

مثال 12

أوجد $\displaystyle\int\frac{x^4-x^5+4x-2}{x-2}\,dx$.

الحل

بالقسمة المطولة نجد أن

$$\begin{array}{r|r}
 & x^3+x^2+2x+8 \\ \cline{2-2}
x-2 & x^4-x^3+4x-2 \\
 & \underline{x^4-2x^3} \\
 & x^3+4x \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & 2x^2+4x \\
 & \underline{2x^2-4x} \\
 & 8x-2 \\
 & \underline{8x-16} \\
 & 14
\end{array}$$

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x - 2}{x - 2} = x^3 + x^2 + 2x + 8 + \frac{14}{x-2}$$

إذن

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 4x - 2x - 2dx}{x - 2} = \int (x^3 + x^2 + 2x + 8)dx + \int \frac{14dx}{x-2}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x + 14 \ln |x - 2| + C$$

2) إذا كانت درجة $p(x)$ أقل من درجة $q(x)$، نحلل $q(x)$ إلى عوامل خطية $x - a$، أو عوامل تربيعية $x^2 + bx + c$.

إذا كان $q(x)$ على شكل $(x-a)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{p(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ولكل عامل تربيعي على شكل $(x^2+bx+c)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{p(x)}{(x^2+bx+c)^k} = \frac{A_1x + B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2+bx+c)^2} +$$

$$\dots + \frac{A_kx + B}{(x^2+bx+c)^k}$$

مثال 13

إذا كانت $q(x)$ دالة خطية، مثل $q(x) = ax + b$، فإن $\int \frac{dx}{ax+b}$ يمكن حسابه بالتعويض عن $u = ax + b$:

وبذلك يكون

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{3} \ln |ax + b| + C.$$

مثـال 14

احسب $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

الحل

أولاً
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

بالضرب في $(x-1)(x-2)(x-3)$، نجد أن:

$$1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)$$

بوضع $x = 1$، نجد أن $A = 1/2$،

بوضع $x = 2$، نجد أن $B = -1$،

بوضع $x = 3$، $C = 1/2$.

إذن
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1/2}{x-3}$$

إذن

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C$$

$$= \ln\left|\frac{[(x-1)(x-3)]^{1/2}}{(x-2)}\right| + C$$

مثـال 15

احسب $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

الحـــل

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

بوضع $x=0$ ، نجد أن $A=1$ ،

بوضع $x=1$ ، نجد أن $C=1$.

الآن نضع $x=2$

$$1=A+2B+2C$$

$$1=1+2B+2$$

إذن $B=-1$.

إذن

$$\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$=\mathbf{ln}\ |x|-\mathbf{ln}\ |x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

حيث أن C مقدار ثابت.

مثـــال 16

احسب $\int\frac{dx}{x^3+x}$

الحـــل

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}1&=A(x^2+1)+x(Bx+C)\\&=Ax^2+A+Bx^2+C^x\\&=(A+B)x^2+Cx+A\end{aligned}$$

$$A+B=0 \Longrightarrow A=-B$$

$$C=0, A=1 \implies B=-1$$

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

تمارين 3.10

أوجد التكاملات التالية:

1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^3}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

4) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^3}dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3+4x}dx$

8) $\displaystyle\int \frac{5x^2+11x+17}{x^3+5x^2+4x+20}dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x^6-x^3+1}{x^4+9x^2}dx$

10) $\displaystyle\int \frac{x^5-x^4-2x^3+4x^2-15x+3}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$

4.10 إكمال المربع

مثـال 17

احسب $\int \frac{dx}{x^2-4x+1}$.

الحـل

$$x^2-4x+1=x^2-4x+4-4+1=(x-2)^2-3$$

لنفرض أن $u=x-2$ وبذلك فإن $du=dx$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1}=\int \frac{dx}{(x-2)^2-3}=\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^3}$$

باستخدام الكسور الجزئية

$$\frac{1}{u^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})}=\frac{A}{u-\sqrt{3}}+\frac{B}{u+\sqrt{3}}$$

$$A+B=0\ ,\ A-B=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\ B=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

إذن

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1}=\int \frac{Adu}{u-\sqrt{3}}+\int \frac{Bdu}{u+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|u-\sqrt{3}|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|u+\sqrt{3}|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C$$

تمارين 4.10

احسب التكاملات الآتية:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-2x-3}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5x+1}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-4x+6}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}$

8) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x^4+4x^2+5}}{x^2+2}dx$

9) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+2}$

10) $\displaystyle\int (x^2-6x)dx$

تعويض فايرستراش:

الدوال الكسرية فى الدوال $\sin\ x$ و $\cos x$ ممكن اجراء تكاملها باستخدام تعويض فايرستراش

نفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

مثال:

Find $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}} dz$$

$$= \int \frac{dz}{z(1+z)} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}\right) dz = \ln|z| - \ln|1+z| + C = \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + C$$

Find $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{3-2\frac{1-z^2}{1+z^2}} dz = \int \frac{2\,dz}{1+5z^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1}(z\sqrt{5}) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \tan^{-1}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

Find $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}}dz = \int \frac{2\,dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

Find $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{5+4\frac{2z}{1+z^2}}dz = \int \frac{2\,dz}{5+8z+5z^2}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z+(\frac{4}{5})}{\frac{3}{5}}\right)+C = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan(x/2)+4}{3}\right)+C$$

SUPPLEMENTARY PROBLEMS

In Problems 14–39, evaluate the given integral.

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

16. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C$

17. $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}dx = -x + \frac{4}{3}[\sqrt{3x+2} - \ln(1+\sqrt{3x+2})] + C$

23. $\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}} + C$

24. $\int \frac{dx}{1-2\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\tan\frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}}\right| + C$

25. $\int \frac{dx}{3+5\sin x} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\tan\frac{1}{2}x + 1}{\tan\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$

26. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1} = \ln\left|\tan\frac{1}{2}x - 1\right| + C$

27. $\int \frac{dx}{5+3\sin x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{5\tan(x/2)+3}{4} + C$

28. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan^2\frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}}\right| + C$

5.10 التكاملات المعتلة

لنفرض أن f دالة متصلة على الفترة $[a, -\infty)$.

نستطيع إيجاد التكامل $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن b عدد أكبر من a، عندما يؤول b إلى ∞ وتكون النهاية

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \quad (1$$

موجودة، وعندها نسمي $\int_a^\infty f(x)dx$ التكامل المعتل، ونقول إن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب. إذا كانت النهاية في (1) غير موجودة، يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً. التكامل المعتل على الشكل $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ يعني:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad (2$$

ويكون متقارباً إذا كانت النهاية (2) موجودة، ومتباعداً إذا كانت النهاية (2) غير موجودة

مثال 18

احسب $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

الحل

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}[-e^{-x}]\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}\right) + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e}$$

$$= 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

مثــال 19

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

الحــل

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln|x|]\Big|_1^b$$

إذن يكون $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ متباعداً.

مثــال 20

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ حيث $n \neq 1$.

الحــل

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^n}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right)\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{-n+1}}{1-n}-\frac{1}{1-n}\right) \\ &= \tfrac{1}{1-n}\lim_{b\to\infty}\left(b^{-n+1}-1\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{n-1} & , \quad n>1 \\ \infty & , \quad n\leq 1\end{cases}\end{aligned}$$

من المثالين السابقين، نستطيع استنتاج أن:

> $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ يكون متقارباً إذا كان $n>1$، ويكون متباعداً إذا كان $n\leq 1$.

قد يكون من الصعب تحديد تقارب أو تباعد التكامل المعتل بالطرق العادية، ولكن هناك اختباراً لمعرفة تقارب أو تباعد تكامل بعض الدوال، وذلك بمقارنة تكاملها مع تكامل بعض الدوال المعروف تكاملها المعتل.

اختبار المقارنة للتكامل المعتل.

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على الفترة $[a,\infty)$، و $0 \le f(x) \le g(x)$ لكل $x \in [a,\infty)$، فإذا كان:

أ) $\int_a^{\infty} g(x)dx$ متقارباً، فإن $\int_a^{\infty} f(x)dx$ يكون متقارباً.

ب) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متباعداً، فإن $\int_a^{\infty} g(x)dx$ يكون متباعداً.

مثال 21

احسب $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

الحل

حيث إن $\frac{1}{\sqrt{x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ لكل $x \in 1,\infty)$، ومن الملاحظة السابقة نستطيع استنتاج أن $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ يكون متقارباً؛ لأن $n = 3/2 > 1$، وبذلك $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ يكون متقارباً، وذلك من اختبار المقارنة.

مثال 22

احسب $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

الحل

حيث إن $\sqrt{1+x^2} \ge \sqrt{1+2x+x^2} = 1+x$ لكل $x \in [2,\infty)$، فإن $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{x+1}$

ولكن $\int_2^\infty \frac{dx}{1+x}$ يكون متباعداً، إذن $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ يكون متباعداً.

نظرية 1

إذا كانت f دالة متصلة على $(-\infty,\infty)$، فإن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ يكون متقارباً، إذا كانت $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ كلاهما متقاربين لأي عدد حقيقي a ويكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

مثـــال 23

احسب $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

الحـــل

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(x+1)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}(b+1) - \tan^{-1}(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

كذلك

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to\infty}\int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to\infty} \tan^{-1}(x+1)\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(a+1)] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

إذن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$

قد يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ معتلاً، حتى على فترة $[a,b]$، ولكن في هذه الحالة يكون للدالة f خط تقارب عمودي عند $x=a$ أو عند $x=b$ أو كليهما.

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة (a,b)، وغير معرّفة عند $x=a$، فإن:

(3 $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

فإذا كانت النهاية في (3) موجودة، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارباً، وإذا كانت النهاية في (3) غير موجودة، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متباعداً.

بالكيفية نفسها، نستطيع تعريف:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

إذا كانت الدالة f غير معرّفة عند $x=b$.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ عدا عند $x=c$ حيث $a<c<b$، الذي يكوّن خط تقارب عمودياً للدالة f، فإن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارباً بشرط تقارب $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

مثـال 24

احسب $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

الحــل

للدالة $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ خط تقارب عمودي عند $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_2^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2$$

مثــال 25

احسب $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

الحــل

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbf{sin}^{-1}(x/3)\Big|_0^{3-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\mathbf{sin}^{-1}\left(\frac{3-\varepsilon}{3}\right) - \mathbf{sin}^{-1}0] = \frac{\pi}{2}$$

مثــال 26

احسب $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

الحــل

نلاحظ أن $x = 1$ هو خط تقارب عمودي للدالة f .

إذن

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

الآن

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (3\sqrt[3]{x-1})\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3[\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}] = 3$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (3\sqrt[3]{x-1})\Big|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3[\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{3}] = 3$$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3=6$$

تمارين 5.10

في التمارين من 1 إلى 20، حدّد ما إذا كان التكامل المعطى متقارباً أو متباعداً، واحسب التكامل المتقارب:

(1 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

(2 $\int_0^{\infty} e^{x/2}dx$

(3 $\int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx$

(4 $\int_e^{\infty} (x-1)e^{-x}dx$

(5 $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\log x}dx$

(6 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$

(7 $\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^2}dx$

(8 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}\log x}$

(9 $\int_{-\infty}^{9} \frac{dx}{(9-x)^2}$

(10 $\int_{-\infty}^{9} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(11 $\int_2^{3} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

(12 $\int_2^{3} \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$

13) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}$

14) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\sec x\,dx$

15) $\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{2x-6}{x^2-6x+5}dx$

16) $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{xdx}{2-x}$

17) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{e^{-1/x}dx}{x^2}$

18) $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{dx}{16-x^2}$

19) $\displaystyle\int_{0}^{9}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$

20) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{x(x+1)}$

6.10 تكاملات تحتوي على $\sqrt{a^2 \pm u^2}$ أو $\sqrt{u^2 - a^2}$

التعويض بالدوال المثلثية في الأشكال التي تحتوي على جذور أو مقلوب $a^2 \pm u^2$ أو $u^2 - a^2$؛ حيث أن a عدد موجب، يفيد في حساب بعض التكاملات.

وهذه التعويضات تختلف من حالة إلى أخرى، ونستطيع تلخيص هذه التعويضات فيما يلي:

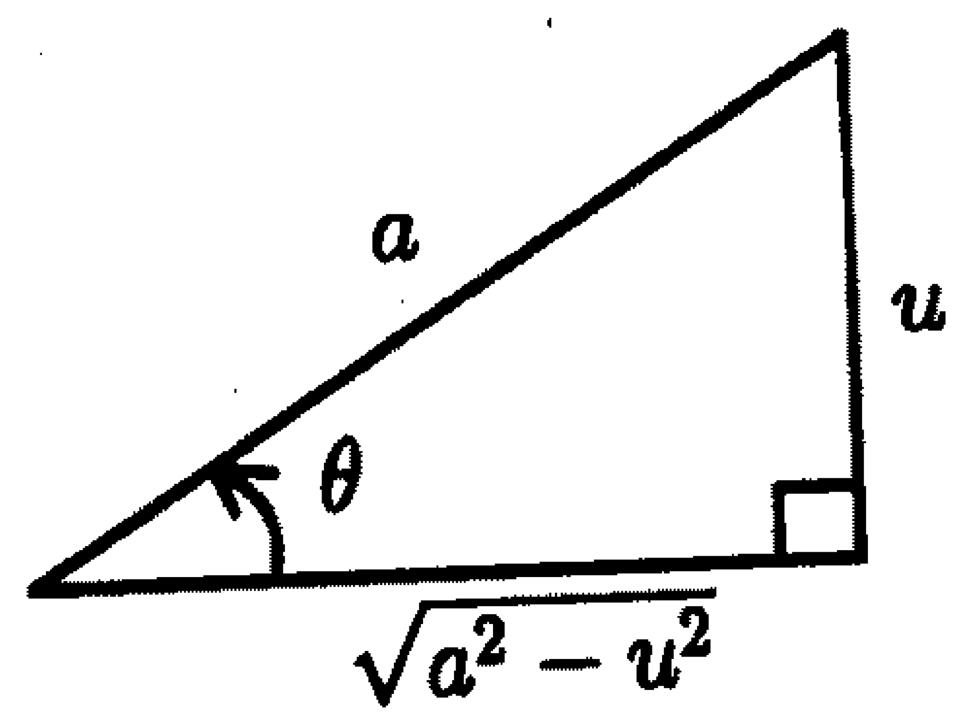
1) إذا احتوى التكامل على $\sqrt{a^2 - u^2}$، نقوم بالتعويض:

$u = a \sin \phi$ ومعنى ذلك $\sin \phi = \dfrac{u}{a}$

وبذلك نحصل على

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \phi} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \phi)}$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2 \phi} = a \cos \phi$$



إذن

$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \phi$ ، إذا كان $u = a \sin \phi$

مثـال 27

احسب $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

الحـل

في هذه الحالة $a = 2$ ومن الفرض $x = 2 \sin \phi$، نجد أن:

$$dx = 2 \sin\phi \, d\phi \quad \text{وكذلك} \quad \sqrt{4-x^2} = 2\cos\phi$$

وبالتالي

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 4\cos^2\phi \, d\phi$$

نلاحظ أن $x=0$ يؤدي إلى أن $\phi=0$، وعندما $x=2$، فإن $\phi=\pi/2$

إذن

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \, d\phi = 2\int_0^{\pi/2} (\cos 2\phi + 1)d\phi$$

$$= [\sin 2\phi + 2\phi]_0^{\pi/2} = [(0+\pi) - (0+0)] = \pi$$

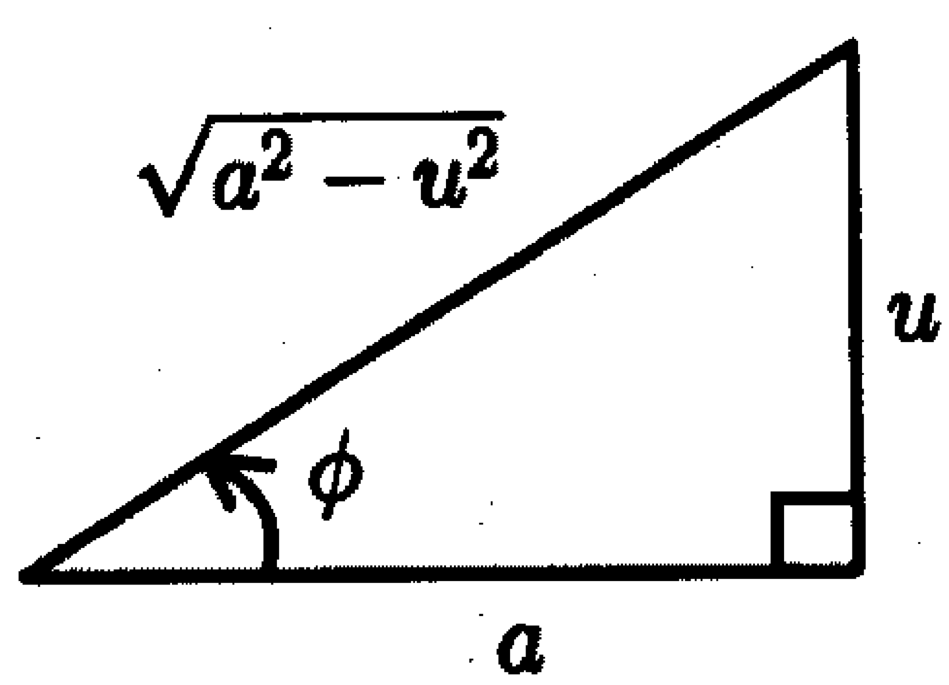
2) إذا احتوى التكامل على $\sqrt{a^2+u^2}$، نقوم بالتعويض:

$u = a\tan\phi$ ومعنى ذلك أن $\tan\phi = \dfrac{u}{a}$

ويكون

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\phi} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\phi)}$$

$$= \sqrt{a^2\sec^2\phi} = a\sec\phi$$



أي إن

$\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\phi$ ، إذا كان $u = a\tan\phi$

مثال 28

احسب $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

الحل

من التعويض $x = a \tan \phi$، بحيث $a = 3$، نجد أن:

$\sqrt{4+x^2} = 3 \sec \phi$ وكذلك $dx = 3 \sec^2\phi d\phi$

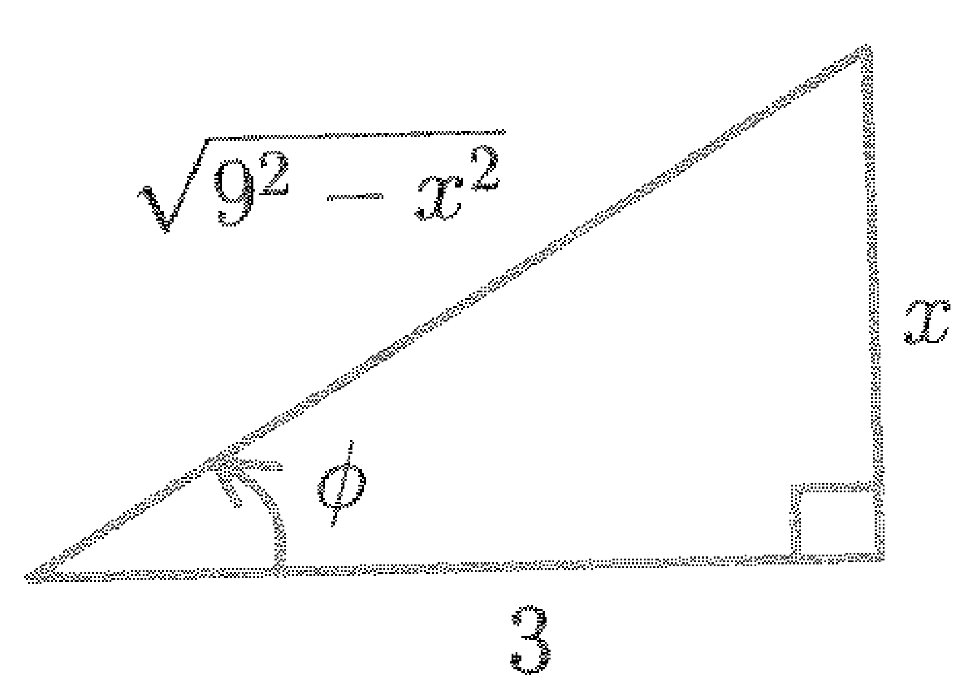
إذن

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3 \sec^2\phi}{(9 \tan^2\phi)(3 \sec \phi)} d\phi$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{\sec \phi}{\tan^2\phi} d\phi = \frac{1}{9}\int \frac{\cos \pi}{\sin^2\phi}$$

لنفرض أن $t = \sin \phi$ ومن ذلك $dt = \cos \phi \, d\phi$

$$\frac{1}{9}\int \frac{\cos \phi}{\sin^2\phi} d\phi = \frac{1}{9}\int t^{-2} dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) + C = -\frac{1}{9t} + C$$
$$= -\frac{1}{9 \sin \phi} + C = -\frac{1}{9} \csc \phi + C$$

من الشكل نلاحظ أن $\csc \phi = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$



إذن

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = -\frac{1}{9}\frac{1\sqrt{x^2+9}}{x} + C = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$$

3) لإيجاد التكامل الذي يحتوي على $\sqrt{u^2-a^2}$ نقوم بالتعويض التالي:

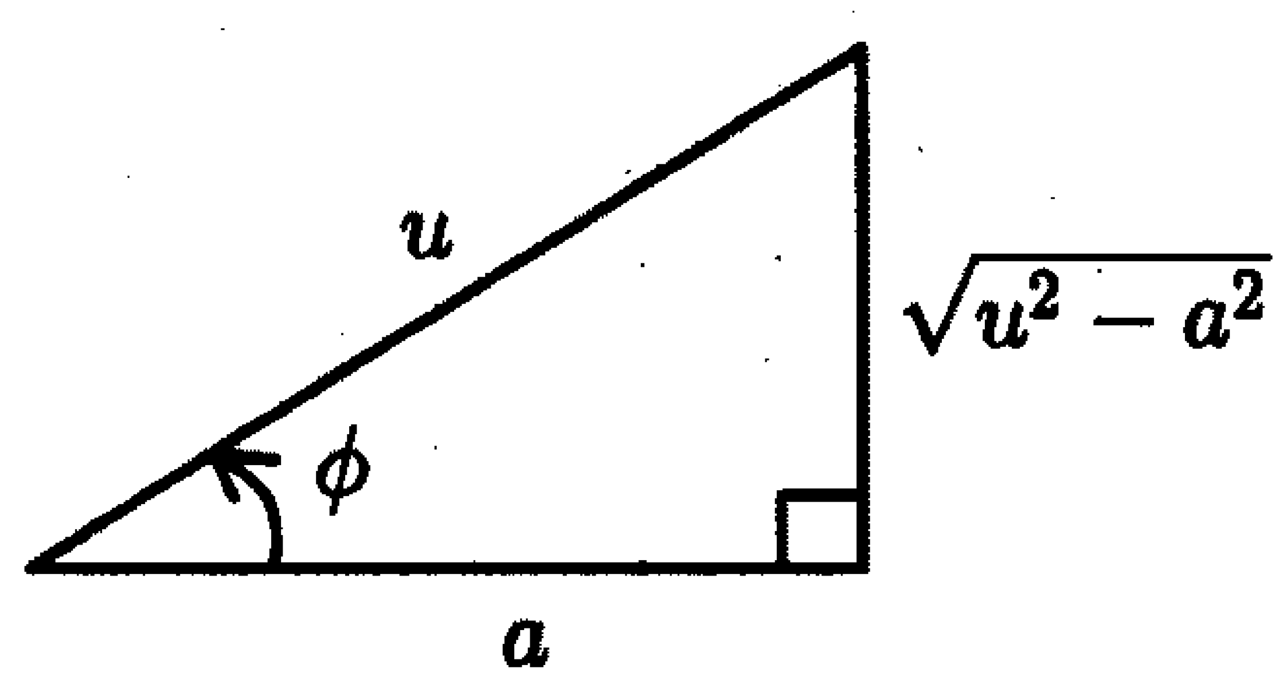
$u = a\sec\phi$، ومعنى ذلك أن

$$du = a\sec\phi\tan\phi\,d\phi \quad \text{و} \quad \sec\phi = \frac{u}{a}$$

الآن

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\phi + a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\phi - 1}$$

$$= \sqrt{a^2\tan^2\phi} = a\tan\phi$$



وبذلك، فإن:

$\sqrt{u^2-a^2} = a\tan\phi$، إذا كان $u = a\sec\phi$

مثـال 29

احسب $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-25}}$.

الحـل

من التعويض $x = 5\sec\phi$، نجد أن:

$$\sqrt{x^2-25} = 4\tan\phi \text{ وكذلك } dx = 5\sec\phi\tan\phi\,d\phi$$

إذن

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{5\ \textbf{sec}\ \phi\ \textbf{tan}\ \phi}{(125\ \textbf{sec}^3\phi)(5\ \textbf{tan}\ \phi)} d\phi = \frac{1}{125}\int \frac{d\phi}{\textbf{sec}^2\phi}$$

$$= \frac{1}{125}\int \ \textbf{cos}^2\phi d\phi = \frac{1}{250}\int (1+\ \textbf{cos}\ 2\phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{250}\left(\phi + \frac{\textbf{sin}\ 2\phi}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{250}(\phi + \frac{2\ \textbf{sin}\ \phi\ \textbf{cos}\ \pi}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{250}(\phi +\ \textbf{sin}\ \phi\ \textbf{cos}\ \pi) + C$$

من الشكل وملاحظة أن $\phi = \ \textbf{csc}\ ^{-1}(x/5) + C$، نجد أن:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{250}\left(\ \textbf{sec}^{-1}(x/5) + \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}(5/x)\right) + C$$

$$= \frac{1}{250}\left(\ \textbf{sec}^{-1}(x/5) + \frac{5\sqrt{x^2-25}}{x^2}\right) + C$$

مثـــال 30

احسب $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$.

الحـــل

بإكمال المربع، نجد أن:

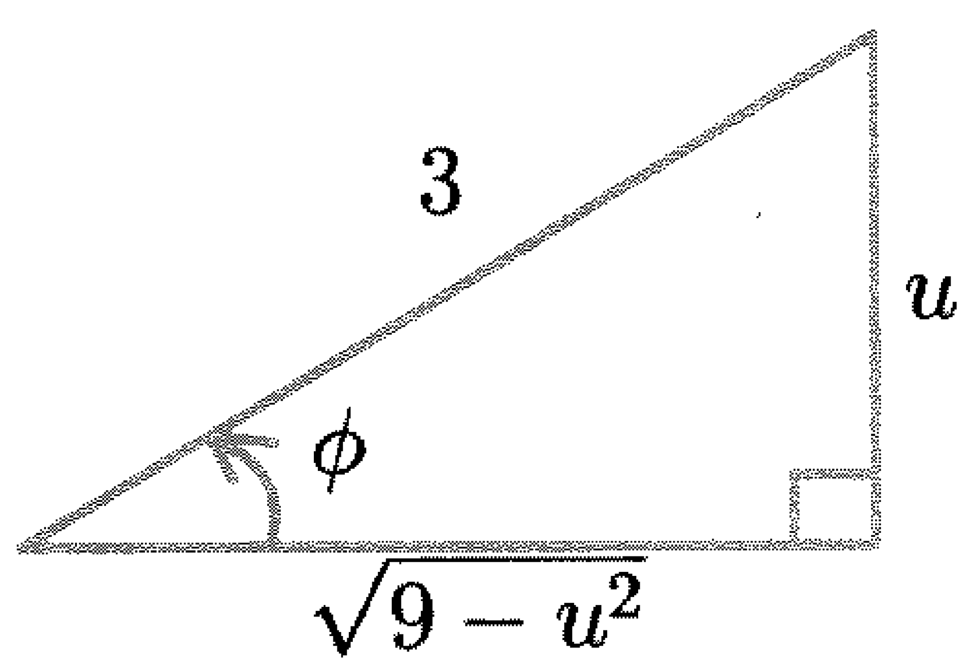
$$5-4x-x^2 = 5-(x^2+4x+4)+4 = 9-(x+2)^2$$

إذا كان $u = x+2$، فإن $du = dx$ و $5-4x-x^2 = 9-u^2$

وبذلك، فإن:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(9-u^2)^3}}$$

والتكامل الأخير ينفع معه التعويض



$x = 3 \sin \phi$، ولـهـذا يـكـون $dx = 3 \sin\phi \; d\phi$ ومـن الـشـكـل نـجـد أن:

$$\sqrt{(9-u^2)^3} = 27 \cos^3\phi$$

إذن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(9-u^2)^3}} = \int \frac{3 \cos \phi}{27 \cos^3\phi} = \frac{1}{9}\int \frac{d\phi}{\cos^2\phi}$$

وإذن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} = \frac{1}{9}\int \sec^2\phi \; d\phi = \frac{1}{9} \tan \phi + C$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x+2}{\sqrt{9-(x+2)^2}}\right) + C$$

$$= \frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

تمارين 6.10

في التمارين من 1 إلى 10، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل المعطى في كل حالة:

1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}dx$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+4}}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}$

9) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{(\tan^2 x+9)^3}}dx$.

10) $\displaystyle\int (3x+2)\sqrt{9x^2+12x+3}\,dx$

تمارين على الفصل العاشر

احسب التكامل المعطى في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\int \cos^2(2x)dx$

2) $\int \sin^3(4x)\cos^2(4x)dx$

3) $\int \sqrt{\cos x}\ \cos^5 x dx$

4) $\int \sin^2(2-3x)dx$

5) $\int \frac{\cos^2(3x/2)}{\sqrt{\sin(3x/2)}}dx$

6) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$

7) $\int x\tan^3(5x^2)dx$

8) $\int \sec^4(1-2x)dx$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+64}}$

10) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{81-x^2}}$

11) $\int \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-8x+41}}$

12) $\int x^2e^{-2x}dx$

13) $\int \sqrt{x}\ \ln(2x)dx$

14) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+4}dx$

15) $\int \frac{e^{4x}}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}\ dx}$

16) $\int \frac{\cot x}{\cot x + \csc x}dx$

17) $\int^2 (ln x)^2 dx$

18) $\int x^5 \sin x^2 dx$

19) $\int_0^1 x\tan^{-1}x dx$

20) $\int \frac{dx}{x^3(1+x)}$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x^{3/4}}$

22) $\int \frac{dx}{x\ln x(\ln x+5)}$

23) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$

24) $\int_0^1 \frac{x^2+3x+1}{x^4+2x^2+1}dx$

25) $\int_0^1 \frac{x^5dx}{(x^2+1)^2}$

26) $\int_0^{1/3} \frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$

(27 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(x/3)}\,dx$

(28 $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{(x-1)^{4/3}}$

(29 $\displaystyle\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\,dx$

(30 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx$

(31 $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$

(32 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-1}}$

(33 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$

(34 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$

(35 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(36 $\displaystyle\int x^{\alpha}(\ln x)^m\,dx$

(37 $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cosh(\beta x)\,dx$

(38 $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$

(39 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)\,dx$

(40 $\displaystyle\int_0^{1} \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^n dx$

(41 $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}\,dx$

(42 $\displaystyle\int_0^{1} x^m\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^n dx$

(43 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^m\,dx}{(\sin x)^n}$

(44 $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx$

(45 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$

(46 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x}\ln(\sin x)\,dx$

(47 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}\,dx}{1+x^{\beta}\sin^2 x}$

(48 $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

(49 $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^7(3x)\sin^4(3x)\,dx$

(50 $\displaystyle\int x^n e^{ax}\cos(bx)\,dx$