

مراجعة كتاب التعميم من ص ٤٦ الى ص ٨٨

حل كتاب حساب التعميم من ص ٤٩ الى ص ٦٨

الرواسم المتصلة - Continuous mapping

تعريف: الرواسم $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ يسمى متصلة عند النقطة $a \in X$ اذا كان لكل V مفتوح في Y تحتوي $f(a)$ يوجد مفتوح U في X بحيث $f(U) \subset V$.
 ونسمى الرواسم متصلة على X اذا كانت متصلة عند كل نقطة في X .
 $f: X \rightarrow Y$ متصلة اذا وفقط اذا كان

$$\forall x \in X, \forall V \text{-open in } Y, f(x) \in V \exists U \text{-open in } X \text{ s.t. } x \in U \text{ and } f(U) \subset V.$$

يجب ملاحظة ان f غير متصلة عند نقطة ما a اذا وجد جوار V لـ $f(a)$ بحيث ان جوار U لـ a تكون $f(U) \not\subset V$.
 وتكون الرواسم غير متصلة على X اذا كانت غير متصلة عند نقطة ما.

مثال: نعرف $(X, \tau_X) = (\{a, b, c\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\})$
 و $(Y, \tau_Y) = (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$
 و نعرف $f: X \rightarrow Y$ بالمتطابق

$$f = \{(a, 0), (b, 0), (c, 1)\}$$

ادرس اتصال الرواسم على X .
 الحل: لدراسة اتصال الرواسم على X يلزم دراسة اتصال الرواسم عند كل نقطة a, b, c من X .

لدراسة ارتباط الدالة عند a عن طريق المثال لدينا
 $f(a) = 0$ وحوارات $f(a) = 0$ والنتيجة شرط بالبرهان
 N_0 وهي كل الفترات المتضمنة في a تكون 0

$$N_0 = \{ \gamma, \{0\} \}$$

بما أن $a \in \gamma$ يوجد جوار $U = \{a\}$ حيث

$$f(U) = \{0\}$$

ممتوازية f في $\{0\}$ وكنواه في γ طبقا للتعريف الدالة
 متصله عند النقطة $x = a$.

بالمثل لبقية نقاط X .

$$N_0 = \{ \gamma, \{0\} \}$$

حوارات $f(b) = 0$ من

عند النظر لحوارات b بما في ذلك $X, \{b, c\}$

وعند اختيار $\gamma = \{0\}$ للنتيجة $f(b) = 0$ لا يوجد

جوار γ حيث صورته كنواه في $\{0\} = \gamma$

لأنه حوارات b من $X, \{b, c\}$

$$f(X) = \{0, 1\} \neq \{0\}$$

$$f(b, c) = \{0, 1\} \neq \{0\}$$

وبالتالي الدالة غير متصله عند النقطة $b \in X$.

قال في تعريف $f: (R, \mathcal{T}) \rightarrow (R, \mathcal{T}_\infty)$

حيث $f(x) = x$ اثبت باستخدام

التعريف ان الدالة متصله على R .

الحل: تعريف $x \in R$ نقم اختيارية احد تعريف

f بما ان $f(x) = x$ وبالعبارة \forall ان جوار

U يوجد $f(U) = U$ جوار x وهو

$$V = f^{-1}(V) = V \text{ من متضمنه في } R \text{ كما ان}$$

$$\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$$

الدالة متصله على R لان x اختيارية