الفرقة : الثانية عام

الشعبة: الرياضيات

المادة: نظرية الاحتمالات

جامعة دمياط- كلية التربية

قسم الرياضيات-كلية العلوم

التاريخ: 21-3-2020

محاضرة رقم 6

نظرية الاحتمالات- التوزيعات المتقطعة

تابع توزيع ذات الحدين + توزيع بواسون

أ.د. محمد احمد انور الشهاوى

محاضرة رقم 6

تابع توزيع ذات الحدين + توزيع بواسون

العلاقة بين العزوم ودالة التوزيع التراكمية

نظريـة (1): القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X بدلالة دالة التوزيع التراكمية $F_X(x) = \Pr\left(X \le x\right)$ تعطى بالعلاقة التالية:

1- إذا كان X متغير عشوائي متقطع، يأخذ قيم $0,1,2,...$ فإن

$$E[X] = \sum_x \left(1 - F_X(x)\right) = \sum_x \Pr\left(X > x\right)$$

انظر كتاب مقدمة في نظرية الاحتمالات من صفحة 80 الى صفحة 82

2- إذا كان X متغير عشوائي متصل

أ- غير سالب ((أي يأخذ قيم غير سالبة)، فإن

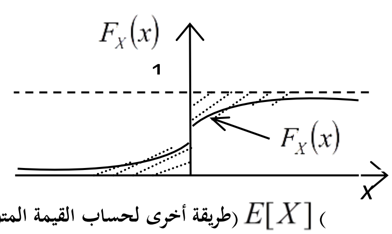
$$E[X] = \int_0^\infty \left(1 - F_X(x)\right) dx = \int_0^\infty \Pr(X > x) dx$$

ب- قيمه أعداد حقيقية، فإن

$$E[X] = \int_0^\infty \left(1 - F_X(x)\right) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx = \int_{-\infty}^\infty x dF_X(x)$$

وذلك في حالة وجود القيمة المتوقعة.

الاثبات: إذا كان X متغير عشوائي من النوع المتصل الغير سالب، أى أن X له دالة كثافة احتمالية $f_X(x)$ حيث $f_X(x) = 0 \quad \forall x < 0$.



($E[X]$ طريقة أخرى لحساب القيمة المتوقعة)

من التعريف وبفرض أن $E[X]$ موجودة:

$$\therefore E[X]=\int_0^\infty tf_X(t)dt=\int_0^\infty f_X(t)dt\int_0^t dx$$

لاحظ أن قيمة هذا التكامل لا تتغير بتغير ترتيب التكامل

$$\therefore E[X]=\int_0^\infty\left\{\int_x^\infty f_X(t)dt\right\}dx=\int_0^\infty\left[1-\int_{-\infty}^x f_X(t)dt\right]dx$$

$$=\int_0^\infty\left(1-F_X(x)\right)dx=\int_0^\infty p\left(X>x\right)dx \qquad (i)$$

بالمثل يمكننا إثبات أن :

$$-\int_{-\infty}^0 tf_X(t)dt=\int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \qquad (ii)$$

من (i) و (ii) ينتج أنه إذا كانت $E[X]$ موجودة فإن:

$$E[X]=\int_0^\infty\left(1-F_X(x)\right)dx-\int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \qquad (iii)$$

والعكس إذا كان التكامل في (iii) موجود فإن القيمة المتوقعة تكون موجودة إذا كاملنا (iii) بالتجزيء لنحصل على $E[X]=\int_{-\infty}^\infty xdF_x\left(x\right)$

ملاحظـة : $\lim_{x\to\infty}x\left[1-F_X(x)\right]=0\,,\quad \lim_{x\to-\infty}xF_X(x)=0$

برهان آخر:

$$E\left[X\right]=\int_0^\infty xf_X\left(x\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b xf_X\left(x\right)dx$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(x\left(F_X\left(x\right)-1\right)\right)\Big|_0^b-\int_0^\infty\left(F_X\left(x\right)-1\right)dx$$

$$=\lim_{b\to\infty} b\left(F_X(b)-1\right)+\int_0^\infty \left(1-F_X(x)\right)dx$$

نلاحظ ان $\lim_{b\to\infty} b\left(F_X(b)-1\right)=0$ والسبب في ذلك لو اعتبرنا

$$0\le b\left(1-F_X(b)\right)\le b\int_b^\infty f_X(x)dx\le\int_b^\infty xf_X(x)dx$$

نجد أن $\Rightarrow 0\le\lim_{b\to\infty} b\left(1-F_X(b)\right)\le 0 \Rightarrow \lim_{b\to\infty} b\left(F_X(b)-1\right)=0$

$$\therefore E[X]=\int_0^\infty \left(1-F_X(x)\right)dx$$

سؤال : أوجد القيمة المتوقعة المناظرة لـ X^2 إذا كان X متغير عشوائي متصل ؟

تابع توزيع ذات الحدين:

مثال (1). صناديق تحتوي أى منها على 12 بيضه، إحتمال أن يتم كسر أى بيضه منها يساوى 0.35 . أوجد إحتمال إختيار أحد الصناديق عشوائى به

1- 5 بيضات مكسوره.
2- أقل من 3 بيضات مكسوره.

الحل:

اذا كان X متغير عشوائى يمثل عدد البيض المكسور فى الصندوق

$$\Pr(X=4)=\binom{12}{4}(0.35)^4\times(0.65)^{(12-4)}=495\times(0.35)^4\times(0.65)^8=0.235$$

$$\Pr(X<3)=\Pr(X=0)+\Pr(X=1)+\Pr(X=2)$$

$$=\binom{12}{0}(0.35)^0\times(0.65)^{12}+\binom{12}{1}(0.35)^1\times(0.65)^{11}$$

$$+\binom{12}{2}(0.35)^{2}\times(0.65)^{10}$$

$$=1\times1\times(0.005688)+12\times(0.35)^{1}\times(0.65)^{11}$$

$$+66\times0.1225\times0.01346=0.0151.$$

<u>انظر كتاب مقدمة فى نظرية الاحتمالات</u>

العزوم و العزوم المركزية ومعامل الالتواء والتفرطح والدالة المولدة للعزوم الخام والمركزية لتوزيع ذات الحدين من صفحة 170 الى صفحة 176

<u>مثال (2)</u>: إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي

$$M_{X}(t)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{t}\right)^{5}$$

أوجد دالة الكتلة الاحتمالية والمتوسط والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

<u>الحــل:</u> المتغير العشوائي X يخضع للتوزيع $X\sim b\left(5;\frac{1}{3}\right)$:

$$\therefore\ p_{X}(x)=\begin{cases}\binom{5}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}, & x=0,1,2,\ldots,5\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$\mu=E[X]=n\,p=5/3, \qquad \sigma^{2}=Var(X)=npq)=10/9\ .$$

مثال (3): وفقا لتقرير الجريمة الموحد (Uniform crime report) لسنة 2012، ارتكب 66.9% من جرائم القتل في أحد الدول العربية بسلاح ناري. إذا تم اختيار 100 قتيل (Murders) عشوائي، اوجد

1-متوسط عدد القتلى بسلاح ناري.
2-احتمال ان يكون من بينهم 75 قتيل قتلوا بسلاح ناري.

الحل: عدد القتلى الذين تم اختيارهم تساوى $n=100$
احتمال ان يكون القتيل بسلاح ناري تساوى $p=0.669$ ، وتكون $q=0.331$ ،
نفرض ان X متغير عشوائي يمثل عدد القتلى بسلاح ناري.
$\therefore$ X يخضع لتوزيع ذات الحدين $b(x;100,0.669)$

1-متوسط عدد القتلى بسلاح ناري:

$$E[X]=np=100(0.669)=66.9\approx 67 \qquad \text{قتيل}$$

2-احتمال ان يكون من بينهم 75 قتيل قتلوا بسلاح ناري

$$\Pr(X=75)=\binom{100}{75}(0.669)^{75}(0.331)^{25}\approx 0.01938$$

<u>دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذات الحدين</u>

دالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع ذات الحدين يرمز لها بالرمز $B(x;n,p)$:

$$B(x;n,p)=F_X(x)=\sum_{u=0}^{x}\binom{n}{u}p^u(1-p)^{n-u}$$

نظرا لأن حساب قيمة هذه الدالة ليس باليسير، فإنه توجد جداول تعطى قيم دالة التوزيع التراكمية $F_X(x)=\Pr(X\le x)$ لكل من قيم x,n,p.

لاحظ ان:
$$1-F_X\left(x-1\right)=1-\Pr\left(X\le x-1\right)=1-\sum_{k=0}^{x-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}-\sum_{k=0}^{x-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=x}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\ .$$

<u>جداول دالة التوزيع التراكمية لذات الحدين Cumulative binomial tables</u>

n=10									
	p=.50	p=.45	p=.40	**p=.35**	p=.30	p=.25	p=.20	p=.15	**x**
10	0.0010	0.0025	0.0060	0.0135	0.0282	0.0563	0.1074	0.1969	0
9	0.0098	0.0207	0.0403	0.0725	0.1211	0.1877	0.2684	0.3474	1
8	0.0439	0.0763	0.1209	0.1757	0.2335	0.2816	0.3020	0.2759	2
7	0.1172	0.1665	0.2150	**0.2522**	0.2668	0.2503	0.2013	0.1298	**3**
6	0.2051	0.2384	0.2508	0.2377	0.2001	0.1460	0.0881	0.0401	4
5	0.2461	0.2340	0.2007	0.1536	0.1029	0.0584	0.0264	0.0085	5
4	0.2051	0.1596	0.1115	0.0689	0.0368	0.0162	0.0055	0.0012	6
3	0.1172	0.0746	0.0425	0.0212	0.0090	0.0031	0.0008	0.0001	7
2	0.0439	0.0229	0.0106	0.0043	0.0014	**0.0004**	0.0001	0.0000	8
1	0.0098	0.0042	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	9
0	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	10
x	p=.50	p=.55	p=.60	p=.65	p=.70	**p=.75**	p=.80	p=.85	

<u>أمثلة:</u> إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين $b\left(x;n,p\right)$ فإن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذات الحدين من الجدول

(i) $B\left(3;10,0.35\right)=0.2522$

(ii) $B\left(2;10,0.75\right)=0.0004$

$$p_X\left(3\right)=\Pr\left(X=3\right)=\Pr\left(X\le 3\right)-\Pr\left(X\le 2\right)$$
$$=B\left(3;10,0.35\right)-B\left(2;10,0.35\right)=0.2522-0.0004=0.2518$$

n=3										
p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
x=0	0,857	0.729	0.614	0.512	0.421	.343	0.274	0.216	0.166	0.125
x=1	0.992	0.972	0.939	0.896	**0.843**	.784	0.718	0.648	0.574	0.500
x=2	0.999	0.999	0.996	0.992	**0.984**	.973	0.957	0.936	0.908	0.875
x=3	.000	1.000	.000	.000	**1.000**	000	.000	1.000	1.000	1.000

<u>أمثلة:</u> إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين $b(x;n,p)$ فإن دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذات الحدين من الجدول

$$B(2;3,0.25)=0.984, B(1;3,0.25)=0.843, \; B(3;3,0.25)=1$$

$$\text{(i) } p_X(2)=\Pr(X=2)=\Pr(X\le 2)-\Pr(X\le 1)$$
$$=B(2;3,0.25)-B(1;3,0.25)=0.984-0.843=0.141$$

$$\text{(ii) } p_X(3)=\Pr(X=3)=\Pr(X\le 3)-\Pr(X\le 2)$$
$$=B(3;3,0.25)-B(2;3,0.25)=1-0.984=0.016.$$

<u>توزيع بواسون Poisson Distribution</u>

تعريف تجربة بواسون- دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع بواسون- الوسط الحسابي والتباين باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية. اشتقاق توزيع بواسون من توزيع ذات الحدين- دراسة بعض الامثلة لتوضح كيفية استخدام توزيع بواسون للاحتمالات كتقريب لتوزيع ذات الحدين- العزوم و العزوم المركزية ومعامل الالتواء والتفرطح والدالة المولدة للعزوم الخام والمركزية لتوزيع بواسون- اشتقاق الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون من الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ذات الحدين

انظر الكتاب من صفحة 176 الى صفحة 188.