جامعة دمياط
Damietta University

كلية التربية
قسم الرياضيات ـ كلية العلوم

محاضرة رقم 7

المادة: نظرية الاحتمالات

تابع توزيع ذات الحدين + توزيع بواسون

الفرقة: الثانية عام

الشعبة: الرياضيات

التاريخ : 2020-3-28

بسم الله الرحمن الرحيم

أبنائى طلاب الفرقة الثانية عام ـ شعبة الرياضيات ـ كلية التربية ـ جامعة دمياط

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

أرجو من الله العلى القدير أن يحفظكم برعايته وأن تكونوا جميعا بصحة جيدة أنتم وأسركم الكريمة، وأن تمر هذه المرحلة (المحنة) بأقل خسائرعلينا وعليكم وعلى مصرنا العزيزة وعلى شعوب العالم جميعا، كما أناشدكم جميعا أن تلتزموا بتوجيهات أولى الأمر!.

أرجو أن تستثمروا هذه الفترة فى الدراسة الجادة والبحث العلمى على الإنترنت لتعلم كل جديد عن مواضيع هذا المقرر الدراسى وأن تزيدوا من معلوماتكم وتنجزوا فى دراستكم قدر الإمكان.

بالنسبة للمحاضرات المتبقية فى مادة نظرية الاحتمالات: إن شاء الله سوف أرسل لكم دليل واضح لكل محاضرة متبقية، بالإستعانة بالكتاب الجامعى **"مقدمة فى نظرية الاحتمالات"**، وذلك فى تاريخ وميعاد محاضرتنا الأسبوعية كما كان فى جدول الكلية **"السبت من كل أسبوع"**،

ويتم ذلك عن طريق **د. إيمان الحديدى** المسئولة عن رفع المحاضرات على موقع الجامعة

1- أرجو أن تكون وصلتكم المحاضرة السادسة على موقع الجامعة فى ميعادها يوم السبت بتاريخ 2020/3/21 وهى إستكمال لآخر محاضرة توقفنا عندها!

2- مرفق لكم المحاضرة السابعة على موقع الجامعة فى ميعادها يوم السبت بتاريخ 2020/3/28 وهى استكمال للمحاضرة السادسة!

تنبيه هام: فى حالة وجود أى صعوبات تواجهكم فى هذا المقرر، يجب طرحها ومناقشتها أولا مع زملائكم، ثم تقوموا بإرسالها للدكتورالمسئول عن السكشن لمساعدتكم فى حلها، وإن ظلت أى صعوبات سوف أقوم بتذليلها والرد عليها.

حفظكم الله ووفقكم لما فيه رضاه

أ.د. محمد احمد انور الشهاوى

نظرية (1). (علاقة تكرارية لتوزيع ذات الحدين)

إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين $b(x;n,p)$، أثبت صحة العلاقة التكرارية الآتية :

$$b(x;n,p)=\frac{(n-x+1)\,p}{x(1-p)}b(x-1;n,p)$$

ثم استخدمها في حساب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X عندما $p=0.40$ و $n=6$.

الاثبات: من توزيع ذات الحدين $b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,\ldots,n$

$$b(x-1;n,p)=\binom{n}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x+1},$$

بالقسمة نحصل على النسبة التالية

$$\frac{b(x;n,p)}{b(x-1;n,p)}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$\times\frac{(x-1)!(n-x+1)!}{n!}\frac{1}{p^{x-1}(1-p)^{n-x+1}}=\frac{n-x+1}{x}\frac{p}{1-p}$$

ومنها نحصل على العلاقة المطلوبة.

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X عندما $p=0.40$ و $n=6$:

$$p_X(0)=\Pr(X=0)=\binom{6}{0}(0.4)^0(1-0.04)^6=(0.6)^6=0.0467$$

$$p_X(1)=\frac{6-1+1}{1}(0.4/0.6)\,p_X(0)=6(4/6)(0.0467)=0.1866$$

$$p_X(2)=\frac{6-2+1}{2}(0.4/0.6)\,p_X(1)=(5/2)(4/6)(0.1866)=0.311$$

$$p_X(3) = (4/3)(4/6)(0.311) = 0.2765$$
$$p_X(4) = (3/4)(4/6)(0.2765) = 0.1382$$
$$p_X(5) = (2/5)(4/6)(0.1382) = 0.0369$$
$$p_X(6) = (1/6)(4/6)(0.0369) = 0.0041$$

من ذلك يمكن كتابة دالة الكتلة الإحتمالية في جدول كما يلى:

x	0	1	2	3	4	5	6
$p_X(x)$	.0467	.1866	.311	.2765	.1382	.0369	.0041

<u>مثال (7):</u> إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين $b(x;n,p)$ و دالة التوزيع التراكمية له هي $Bi(x;n,p) = F_X(x)$ أثبت أن:

(i) $b(x;n,p) = Bi(x;n,p) - Bi(x-1;n,p)$

(ii) $Bi(x;n,p) = 1 - Bi(n-x-1;n,1-p)$

(iii) $b(x;n,p) = Bi(n-x;n,1-p) - Bi(n-x-1;n,1-p)$

<u>الحـــل:</u> (i) من تعريف دالة التوزيع التراكمية $Bi(x;n,p) = \Pr(X \le x)$ نجد أن:

$$Bi(x;n,p) = \sum_{k=0}^{x} b(k;n,p) = b(0;n,p) + b(1;n,p) + \dots$$
$$+ b(x-1;n,p) + b(x;n,p)$$

$$Bi(x-1;n,p) = \sum_{k=0}^{x-1} b(k;n,p) = b(0;n,p) + b(1;n,p) + \dots + b(x-1;n,p)$$

بالطرح نحصل على المطلوب فى رقم (i).

(ii) من تعريف دالة التوزيع التراكمية $Bi(x;n,p)=\Pr(X\le x)$ نجد أن:

$$Bi(x;n,p)=\sum_{k=0}^{x} b(k;n,p)=\sum_{k=0}^{x}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

بوضع $y=n-k$ ← قيم الـ y هي $n,n-1,...,n-k$ والتي يمكن إعادة ترتيبها تصاعدياً $n-k,n-k+1,...,n-1,n$ لنحصل على

$$Bi(x;n,p)=\sum_{y=n-x}^{n}\frac{n!}{(n-y)!\,y!}p^{n-y}(1-p)^{y}=\sum_{y=n-x}^{n}\binom{n}{y}(1-p)^{y}p^{n-y}$$

$$=\sum_{y=n-x}^{n} b(y;n,1-p)=1-\sum_{y=0}^{n-x-1} b(y;n,1-p)=1-Bi(n-x-1;n,1-p)$$

(iii) بالتعويض من (i) ، (ii) نحصل على

$$b(x;n,p)=\left[1-Bi(n-x-1;n,1-p)\right]-\left[1-Bi(n-x;n,1-p)\right]$$

$$=Bi(n-x;n,1-p)-Bi(n-x-1;n,1-p).$$

<u>اشتقاق توزيع بواسون من توزيع ذات الحدين:</u>
توزيع بواسون هو نهاية توزيع ذي الحدين $b(x;n,p)$ حين $n\to\infty$ و $p\to 0$ بحيث $\lambda=np$ ، أي أن: $$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

<u>الإثبات:</u> نفرض أن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذي الحدين $b(x;n,p)$

$$\therefore\ b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}p^x(1-p)^{n-x}$$

بالتعويض عن $p=\lambda/n$ نحصل على:

$$b(x;n,p)=\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}(\lambda/n)^x(1-\lambda/n)^{n-x}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}(1-\lambda/n)^{n-x}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n\times n\times\ldots\times n}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^x}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-(x-1)}{n}\right)\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^x},$$

نلاحظ أن عدد حدود البسط والمقام في المقدار الثاني هو x فنقسم كل حد بسط ومقام على n عندما $n\to\infty$ بحيث تبقى $\lambda=np$ ثابتة هذا يعني أن $p\to 0$ عندما $n\to\infty$ وإلا فإن np لا يمكنها أن تبقى ثابتة.

إذا أخذنا نهاية المقدار عندما $n\to\infty$ فإننا نجد أن:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)=1\ ,\ \left(1-\frac{2}{n}\right)=1\ ,\ \ldots\ \left(1-\frac{x-1}{n}\right)=1,$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n=e^{-\lambda}$$ (من تعريف الدالة الآسية)

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^{-x}=(1-0)^{-x}=1$$

من ذلك نستنتج أنه عندما $n \to \infty$ و $p \to 0$ بحيث $\lambda = np$ ، نحصل على:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} b(x;n,p) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

<u>إثبات آخر</u>**:** نفرض أن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين $b(x;n,p)$:

$$p_X(x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n$$

عندما $x = 0$ نجد بعد التعويض عن $p = \lambda/n$ أن:

$$p_X(0) = b(0;n,p) = (1-p)^n = (1-\lambda/n)^n$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$\log b(0;n,p) = n \log(1-\lambda/n)$$

$$= n\left[(-\lambda/n) - \frac{(-\lambda/n)^2}{2} + \frac{(-\lambda/n)^3}{3} - \frac{(-\lambda/n)^4}{4} + \cdots\right]$$

$$= -\lambda - \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda^3}{2n^2} - \frac{\lambda^4}{2n^3} - \ldots$$

لقيم n الكبيرة نجد أن: $\log b(0;n,p) \cong -\lambda \Rightarrow b(0;n,p) \cong e^{-\lambda}$

حيث العلامة $\cong$ تعني التساوي بالتقريب.

يمكننا الآن استخدام العلاقة التكرارية التالية (من نظرية (1)):

$$b(x;n,p) = \frac{np-(x-1)p}{x(1-p)} b(x-1;n,p)$$

عندما $x = 1$ نجد أن $b(1;n,p) = \frac{np}{1-p} b(0;n,p) \cong \frac{np}{1-p} e^{-\lambda}$

نفرض أن $n \to \infty$ و $p \to 0$ والتعويض عن $p = \lambda/n$ نحصل على

$$b(1;n,p) \cong \lambda\, e^{-\lambda}$$

عندما $x = 2$ نجد أن $b(2;n,p) = \dfrac{np-p}{2(1-p)}\, b(1;n,p) \cong \dfrac{np-p}{2(1-p)}\left(\lambda\, e^{-\lambda}\right)$

نفرض أن $n \to \infty$ و $p \to 0$ والتعويض عن $p = \lambda/n$ نحصل على

$$b(2;n,p) \cong \frac{\lambda}{2}\left(\lambda\, e^{-\lambda}\right) = \frac{\lambda^2}{2!}\, e^{-\lambda}$$

بالاستمرار بهذه الطريقة نحصل لأي عدد x حيث $x = 0,1,2,\ldots$ على:

(حيث $p = \lambda/n$ و $n \to \infty$ و $p \to 0$) $\qquad b(x;n,p) \cong \dfrac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}.$

<u>نظرية (2). (علاقة تكرارية لتوزيع بواسون)</u>

إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع بواسون بالبارامتر λ. اثبت صحة العلاقة التكرارية الآتية : $\Pr(X = x+1) = \dfrac{\lambda}{x+1}\Pr(X = x)$

الاثبات: $\Pr(X = x) = \dfrac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda},\ \Pr(X = x+1) = \dfrac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!}\, e^{-\lambda}$

اذن $\dfrac{\Pr(X = x+1)}{\Pr(X = x)} = \dfrac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!}\, e^{-\lambda} \times \dfrac{x!}{\lambda^x} e^{\lambda} = \dfrac{\lambda}{x+1}$

<u>نظرية (3). (علاقة تكرارية للعزوم المركزية لتوزيع بواسون)</u>

إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع بواسون بالبارامتر λ. اثبت ان العزوم المركزية للمتغير X تحقق العلاقة التكرارية الآتية :

$$\mu_{r+1} = r\lambda\mu_{r-1} + \lambda\,\frac{d\mu_r}{d\lambda}\ ,\quad r = 1,2,\ldots$$

<u>الإثبات</u>: من تعريف دالة العزوم المركزية للمتغير X :

$$\mu_r = E\left[X-\lambda\right]^r = \sum_{x=0}^{\infty}\left(x-\lambda\right)^r \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\frac{d\mu_r}{d\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\left[-e^{-\lambda}\lambda^x\left(x-\lambda\right)^r + x\lambda^{x-1}e^{-\lambda}\left(x-\lambda\right)^r + r\left(x-\lambda\right)^{r-1}\left(-1\right)\lambda^x e^{-\lambda}\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\left(x-\lambda\right)^{r-1}e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\left[-\lambda\left(x-\lambda\right)+x\left(x-\lambda\right)-r\lambda\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{x!}\left(x-\lambda\right)^{r-1}e^{-\lambda}\lambda^{x-1}\left[\left(x-\lambda\right)^2-r\lambda\right]$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\left(x-\lambda\right)^{r+1}\frac{\lambda^{x-1}e^{-\lambda}}{x!} - r\sum_{x=0}^{\infty}\left(x-\lambda\right)^{r-1}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \tfrac{1}{\lambda}\mu_{r+1} - r\mu_{r-1}.$$

اذن تتحقق العلاقة.

بوضع $r=1,2,3$ على الترتيب نحصل على العزوم المركزية الأربعة الأولى وهي

$$\mu_2 = \lambda\mu_0 + \lambda\frac{d\mu_1}{d\lambda} = \lambda \quad ,\mu_0 = 1,\mu_1 = 0$$

$$\mu_3 = 2\lambda\mu_1 + \lambda\frac{d\mu_2}{d\lambda} = 0+\lambda = \lambda, \qquad \mu_4 = 3\lambda\mu_2 + \lambda\frac{d\mu_3}{d\lambda} = 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \eta_3 = \frac{\lambda}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \;, \qquad \eta_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}.$$

مثال (1): عرف الدالة المولدة للاحتمال $G_X(s)$ لمتغير عشوائي متقطع X ومنها اثبت ان

$$\frac{d^k G_X(s)}{ds^k}\Big|_{s=1} = E\left[X(X-1)(X-2)...(X-k+1)\right],$$

$$p_X(k) = \frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{ds^k}G_X(s)\Big|_{s=0}$$

ثم اوجد الدالة المولدة للاحتمال لتوزيع بواسون.

الحل: من تعريف الدالة المولدة للاحتمال $G_X(s)$ لمتغير عشوائي متقطع X:

$$G_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_X(x), \ \ |s|<1, \quad p_X(x) = \Pr(X=x)$$

$$\frac{dG_X(s)}{ds} = G_X'(s) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_X(x) s^{x-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dG_X(s)}{ds}\Big|_{s=1} = E[X]$$

$$\frac{d^2 G_X(s)}{ds^2} = G_X''(s) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) p_X(x) s^{x-2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 G_X(s)}{ds^2}\Big|_{s=1} = E\left[X(X-1)\right],$$

بالمثل:

$$\frac{d^k G_X(s)}{ds^k} = G_X{}^{(k)}(s) = \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)(x-2)...(x-k+1) p_X(x) s^{x-k} \Rightarrow$$

$$\frac{d^k G_X(s)}{ds^k}\Big|_{s=1} = E\left[X(X-1)(X-2)...(X-k+1)\right] = \sum_{x=k}^{\infty}\binom{x}{k} k!\, p_X(x)\, s^{x-k}$$

$$G_X{}^{(k)}(s) = \sum_{x=k}^{\infty}\binom{x}{k} k!\, p_X(x)\, s^{x-k} = k!\, p_X(k) + \sum_{x=k+1}^{\infty}\binom{x}{k} k!\, p_X(x)\, s^{x-k}$$

$$G_X{}^{(k)}(s)\Big|_{s=0} = k!\, p_X(k) + \sum_{x=k+1}^{\infty}\binom{x}{k} k!\, p_X(x)\, s^{x-k}\Big|_{s=0} = k!\, p_X(k)$$

$\Rightarrow \; p_X(k) = G_X^{(k)}(0)/k!.$

الدالة المولدة للاحتمال لتوزيع بواسون

$$G_X(s) = E\left[s^X\right] = E\left[e^{X(\ln S)}\right] = M_X(\ln S), \quad s > 0 \text{ لبعض قيم}$$

من الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون بالبارا متر λ : $\quad M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$

تكون الدالة المولدة للاحتمال لتوزيع بواسون هى

$$G_X(s) = M_X(\ln S) = e^{\lambda(s-1)}.$$

========