# الهندسة التفاضلية

لطلاب كلية التربية (عام) – شعبة الرياضيات

الفرقة الرابعة

أستاذ المادة / د. محمد كامل الجندي

(هذه المحاضرات هي إستكمال لما تمت دراسته بالكلية)

الجزء الخامس : نظرية السطوح

# نظرية السطوح

## [١] مقدمة :

يمثل السطح بأكثر من صورة ففي الإحداثيات الكارتيزية يعطى السطح على الصورة

$$F(x, y, z) = 0$$

وكمثال على ذلك السطوح الآتية في الفراغ $R^3$ :-

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (1)$$

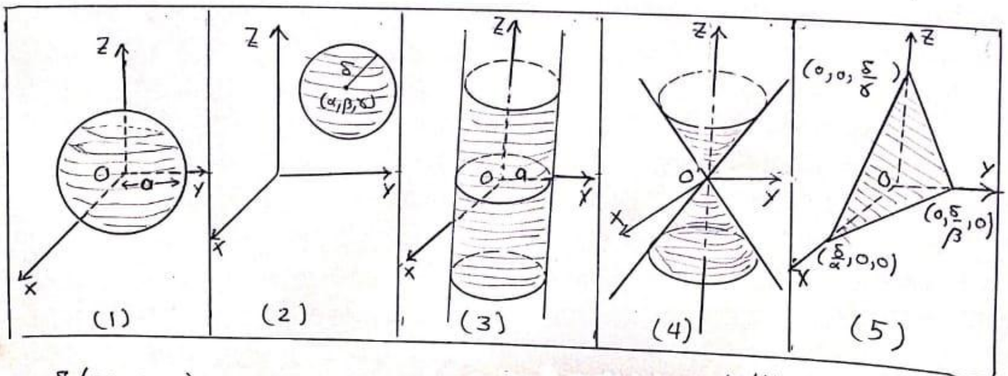
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \delta^2 \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (3)$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (4)$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \qquad (5)$$

المعادلة (1) تمثل سطح كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $a$.
والمعادلة (2) تمثل سطح كرة مركزها $(\alpha, \beta, \gamma)$ ونصف قطرها $\delta$.
والمعادلة (3) تمثل سطح إسطوانة دائرية قائمة محورها هو محور $z$ ومقطعها بالمستوى $z=0$ دائرة نصف قطرها $a$ ومركزها نقطة الأصل
والمعادلة (4) تمثل سطح مخروط رأسه نقطة الأصل ومحوره هو محور $z$
والمعادلة (5) تمثل مستوى يقطع محاور الإحداثيات في النقط $(0,0,\frac{\delta}{\gamma})$ , $(0,\frac{\delta}{\beta},0)$ , $(\frac{\delta}{\alpha},0,0)$




وجدير بالذكر انه اذا كان $S_1(x,y,z)=0$ , $S_2(x,y,z)=0$ سطحين في الفراغ فانه بحلهما معاً نحصل على النقط المشتركة (أي بحل المعادلة $S_1 = S_2$) وهناك أكثر من حالة :-

$\boxed{2}$

(i) $S_1 = S_2$ لها حل وحيد $x=\alpha$ , $y=\beta$ , $z=\gamma$ وهذا يعني أن السطحين يتماسان في نقطة واحدة هي النقطة $(\alpha,\beta,\gamma)$

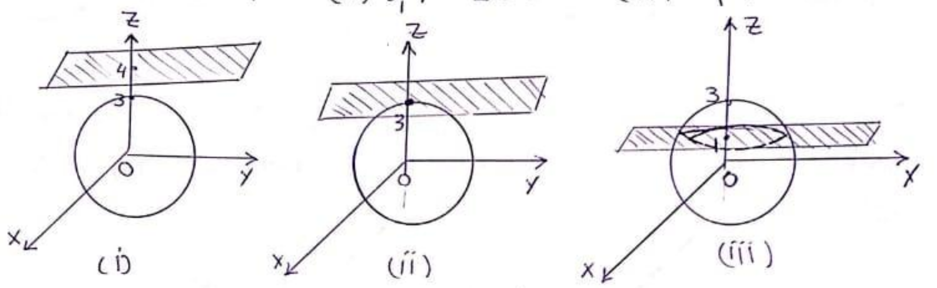
أو $S_1 = S_2$ لها عدد محدود من الحلول وفي هذه الحالة يتماس السطحين في عدد محدود من النقط

(ii) $S_1 = S_2$ ليس لها أي حل حقيقي وهذا يعني أن السطحين لا يتقاطعان

(iii) خلاف الحالتين السابقتين فإن السطحين يتقاطعان في منحنى

__مثال__: السطح $S_2 : x^2+y^2+z^2=9$ والسطح $S_1$ حيث:-

(i) $S_1 : z = 4$ (ii) $S_1 : z = 3$ (iii) $S_1 : z = 1$




في (i) المستوى $z=4$ لا يتقاطع مع الكرة $x^2+y^2+z^2=9$

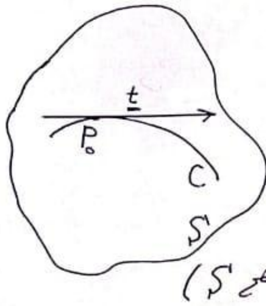
في (ii) المستوى $z=3$ يمس الكرة $x^2+y^2+z^2=9$ في النقطة $(0,0,3)$

في (iii) المستوى $z=1$ تقطع الكرة $x^2+y^2+z^2=9$ في منحنى هو الدائرة $z=1$ , $x^2+y^2=8$

## 2 الاتجاهات على السطح :-

نعتبر سطح $S'$ ولتكن معادلته هي

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$




ونفرض منحنى $C$ واقع بأكمله على السطح $S'$

ولكن هذا السطح معطى بدلالة البارامتر الطبيعي $s$ أي أن $C$ هو

$$\underline{r} = \underline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \qquad (2)$$

ونفرض نقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ واقعة على المنحنى $C$ (وبالتالي على السطح $S'$)

ونفرض أن قيمة البارامتر الطبيعي $s$ عند النقطة $P_0$ هي $s_0$

حيث أن المنحنى (2) يقع بأكمله على السطح (1) فهو يحقق معادلته وبالتالي بالتعويض من (2) في (1)

$$\therefore \quad F(x(s), y(s), z(s)) = 0 \qquad (3)$$

بالتفاضل الكلي للمعادلة (3) بالنسبة إلى $s$ نحصل على

$$0 = \frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad (4)$$

المعادلة (4) صحيحة عند كل نقطة على المنحنى $C$ وبالتالي فهي صحيحة عند $P_0$ (والتي عندها $s = s_0$)

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{ds}\right)_{s_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{ds}\right)_{s_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}\left(\frac{dz}{ds}\right)_{s_0} = 0 \qquad (5)$$

المعادلة (5) يمكن كتابتها على الصورة

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}\right]\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_{s_0}, \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_{s_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{s_0}\right\} = 0 \qquad (6)$$

ولكن من دراستنا للمنحنيات نعلم أن المتجه $\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_{s_0}, \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_{s_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{s_0}\right\}$ هو متجه وحدة المماس $\underline{t}$ للمنحنى (2)

وحيث أن حاصل ضرب المتجهين { — } ، [ — ] في المعادلة (6) يساوي صفر فإننا نستنتج أنهما متعامدان وعليه فإن المتجه [ — ] عمودي على $\underline{t}$ ولنرمز للمتجه [ — ] بالرمز $\underline{N}$ اذن المعادلة (6) يمكن كتابتها على الصورة

$$\underline{N} \cdot \underline{t} = 0$$

$$, \underline{N} = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}, \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}\right], \quad \underline{t} = \left\{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_{s_0}, \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_{s_0}, \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{s_0}\right\}$$

وبتأمل المتجه $\underline{N}$ نجد أنه يعتمد على السطح $F$ وعلى النقطة $P_0$ على السطح ولا يعتمد على المنحنى $C$

4

وعلى ذلك فإن $\underline{N}$ ليس عمودياً فقط على المماس للمنحنى $C$ عند النقطة $P_0$ ولكنه عمودياً على جميع المنحنيات الواقعة على السطح عند النقطة $P_0$

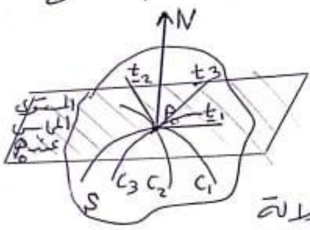
نستنتج أيضاً من كون $\underline{N}$ عمودي عند $P_0$ على المماسات لجميع المنحنيات الواقعة على السطح $S$ والمارة بالنقطة $P_0$

وعلى ذلك فإن جميع المماسات للمنحنيات المارة بالنقطة $P_0$ تقع جميعاً في مستوى واحد

يسمى المستوى الذي يحوي جميع المماسات عند $P_0$ المستوى المماس

ويسمى $\underline{N}$ العمودي على المستوى المماس (أو اختصاراً العمودي عند $P_0$)

أما أي مماس عند نقطة على منحنى على السطح فيسمى اتجاه على السطح




نخلص مما سبق ومن معلوماتنا عن معادلة مستوى بدلالة نقطة عليه والاتجاه العمودي عليه، وكذلك معادلة مستقيم في الفراغ بمعلومية نقطة عليه واتجاه يوازيه إنه للسطح

$$F(x, y, z) = 0$$

معادلة المستوى المماس عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ الواقعة على السطح هي :-

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0 \qquad (*)$$

أما معادلة المستقيم العمودي على المستوى المماس هي :-

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}} = \lambda \quad (\text{بارامتر } \lambda) \qquad (**)$$

<u>مثال(1)</u> أوجد معادلة المستوى المماس ومعادلة العمودي للسطح :-

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, c)$

<u>الحل</u>

نكتب معادلة السطح في الصورة

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (1)$$

بتفاضل (1) جزئياً بالنسبة الى $x$ وبالنسبة الى $y$ وبالنسبة الى $z$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \quad , \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2} \quad , \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} = 0 \quad , \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} = 0 \quad , \left(\frac{\partial F}{\partial}\right)_{P_0} = \frac{2c}{c^2} = \frac{2}{c}$$

$\therefore$ معادله المستوى المماس عند $P_0$ هي

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z-z_0) = 0$$

$$(0)(x-0) + (0)(y-0) + \frac{2}{c}(z-c) = 0$$

أى أن معادله المستوى المماس هي

(2)

$$\boxed{z = c}$$

أما معادله العمودى علاى $P_0$ فهي

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}}$$

أى:

(3)

$$\boxed{\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{c(z-c)}{2} = \lambda \,, \ \lambda \text{ بارامتر}}$$

**ملاحظة** (i) نقول تجاوزاً أن (**) هي معادله العمودى ولكنها في الحقيقة معادلتين (ثلاثة نسب متساوية تعطيان معادلتين مستقلتين)

(ii) وجود صفر في مقام النسبتين الأولتين في (3) جائز ويعني

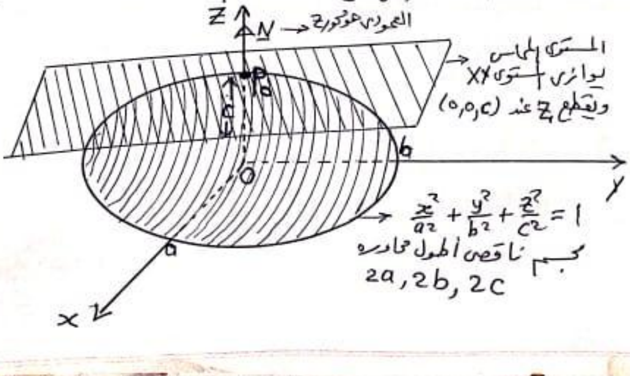
$$\frac{x}{0} = \lambda \Rightarrow x = 0.\lambda \Rightarrow x = 0$$

وبالمثل $y = 0$

أما $\frac{c(z-c)}{2} = \lambda \Leftarrow z = \lambda_1$ حيث ($\lambda_1$ بارامتر، $\lambda_1 = \frac{2\lambda}{c} + c$)

أى أن معادلات العمودى هي $x = 0, \ y = 0, \ z = \lambda_1$

وهي معادله محور $z$ (كل قيمة للبارامتر $\lambda_1$ تعطي نقطة على محور $z$)



**مثال (2):** إثبت إن المستوى المماس للسطح $xyz = a^3$ عند أي نقطة عليه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ يكون مع مستويات الإحداثيات هرم ثلاثي ثابت الحجم

الحل

نكتب معادلة السطح على الصورة

$$F(x,y,z) = xyz - a^3 = 0$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = yz \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy$$

$$\therefore \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} = y_0 z_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} = x_0 z_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} = x_0 y_0$$

$\therefore$ معادلة المستوى المماس للسطح عند $P_0$ هي

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}(z - z_0) = 0$$

$$\therefore \quad y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0$$

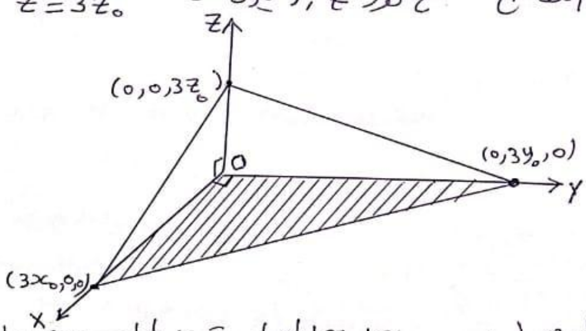
اي أن معادلة المستوى المماس هي

$$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3 x_0 y_0 z_0 \qquad (1)$$

لإيجاد تقاطع المستوى المماس مع محور $x$ نضع $y = z = 0$

$$\therefore x = \frac{3 x_0 y_0 z_0}{y_0 z_0} = 3 x_0$$

بالمثل التقاطع مع محور $y$, $z$ يكون عند $y = 3y_0$ , $z = 3z_0$




لكن $V$ حجم الهرم (رؤوسه نقط تقاطع المستوى المماس مع محاور الإحداثيات والرأس الرابعة نقطة الأصل)

$V =$ ثلث مساحة القاعدة مضروب في الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}(3x_0)(3y_0)\right][3z_0] = \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0 = \frac{9}{2} a^3$$

(لاحظ أن $(x_0, y_0, z_0)$ تقع على السطح فهي تحقق معادلته)

فيما يلي من دراستنا لنظرية السطوح سنستخدم ما يسمى أسلوب أينشتين للجمع

## أسلوب أينشتين الجمعي :-

هذا الأسلوب ينص على ما يأتي :-
في أي صيغة من الصيغ المشتملة على رموز ذات ترقيمات سفلية وأخرى ذات ترقيمات علوية
اذا ظهر ترقيم متغير مرة بأعلى وأخرى بأسفل فان هذا يعني تلقائياً اجراء عملية جمع لهذه الصيغة
في نطاق المدى المسموح به لهذا الرمز
وسنستخدم مجموعتين من الرموز الترقيمية احداها لاتينية مثل $i, j, k, \ldots$ ومداها هو
$1, 2, 3$ وأخرى إغريقية مثل $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ومداها هو $1, 2$ وتوضيحاً لذلك فان

$$a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 ,$$

$$A_{\alpha\beta} B^{\beta} = A_{\alpha 1} B^1 + A_{\alpha 2} B^2 ,$$

$$A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = A_{11} B^{11} + A_{12} B^{12} + A_{21} B^{21} + A_{22} B^{22}$$

## صور لمعادلة السطح :-

الصورة الكرتيزية :-

(i) الصورة الضمنية :- $F(x, y, z) = 0$ (1)

(ii) صورة مونجي :- $z = G(x, y)$ (2)

الصورة البارامترية

ونعطي السطح بدلالة بارامترين ولتكن $u, v$ على الصورة :-

$$\underline{X} = \underline{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (3)$$

ولأن دراسة السطوح ستتضمن عمليات جمع لحدود كثيرة فمن الأنسب استخدام
اسلوب اينشتين الجمعي ولنتمكن من ذلك أن نستخدم الرموز الآتية ؛
بدلاً من $x, y, z$ سنستخدم $x^1, x^2, x^3$ وبدلاً من $u, v$ سنستخدم $u^1, u^2$
فنكتب (1)، (2)، (3) كالآتي

$$F(x^i) = 0 , \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)'$$

$$x^3 = G(x^i) , \quad i = 1, 2 \quad (2)'$$

$$\underline{X} = (x^i(u^\alpha)) , \quad i = 1, 2, 3 , \quad \alpha = 1, 2 \quad (3)'$$

أما المثالين (1)، (2) فيكتب السطحين كل منهما على النحو التالي

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{x^i}{a_i}\right)^2 = 1 \quad (4) , \quad x^1 x^2 x^3 = a^3 \quad (5)$$

سبق وأن أعطينا معادلة المستوى عند نقطة $P_0$ على سطح $S$ في حال ما إذا كان السطح معطى بالصورة الكرتيزية الضمنية. أما إذا كان السطح معطى بالمعادلات البارامترية $x^i = x^i(u^\alpha)$ فإن المستوى المماس عند النقطة $P(u_0^\alpha)$ يعطى بالمعادلة

$$\begin{vmatrix} x^1(u^\alpha) - x^1(u_0^\alpha) & x^2(u^\alpha) - x^2(u_0^\alpha) & x^3(u^\alpha) - x^3(u_0^\alpha) \\ x_1^1(u_0^\alpha) & x_1^2(u_0^\alpha) & x_1^3(u_0^\alpha) \\ x_2^1(u_0^\alpha) & x_2^2(u_0^\alpha) & x_2^3(u_0^\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

حيث حلت الرموز $x^1, x^2, x^3$ بدلاً من $x, y, z$ كما حلت الرموز $u^1, u^2$ بدلاً من $u, v$
إما الرقم أسفل أحد الرموز $x^i$ فيعني تفاضل $x^i$ جزئيا بالنسبة الى البارامتر $u$ ذو نفس الترقيم فمثلاً $x_2^3(u_0^\alpha)$ تعني $\left(\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)_{P_0}$ حيث $x^3$ (كما $x^1, x^2$) داله في $u^1, u^2$
وحيث عند $P_0$ يأخذ كل من $u^1, u^2$ قيماً ما ولتكن $u^1 = r, u^2 = s$

ملاحظة: عند فك المحدد في المعادلة (6) باستخدام الصف الأول نحصل على

$$A\left(x^1(u^\alpha) - x^1(u_0^\alpha)\right) + B\left(x^2(u^\alpha) - x^2(u_0^\alpha)\right) + C\left(x^3(u^\alpha) - x^3(u_0^\alpha)\right) = 0$$

هذه هي معادلة المستوى المماس حيث
$$A = \begin{vmatrix} x_1^2(u_0^\alpha) & x_1^3(u_0^\alpha) \\ x_2^2(u_0^\alpha) & x_2^3(u_0^\alpha) \end{vmatrix}$$

و بالمثل نعين $B$ (مع ملاحظة قاعدة الإشارات في فك المحدد) وكذلك نعين $C$
فتكون معادلة العمودي على المستوى المماس هي

$$\frac{x^1(u^\alpha) - x^1(u_0^\alpha)}{A} = \frac{x^2(u^\alpha) - x^2(u_0^\alpha)}{B} = \frac{x^3(u^\alpha) - x^3(u_0^\alpha)}{C} \qquad (7)$$

أما اذا أعطى السطح بصورة مونج $x^3 = x^3(x^1, x^2)$ فيمكن اعتبار $x^1 = u^1$ , $x^2 = u^2$
ويكون $x^3 = x^3(u^1, u^2)$ وبذلك تكون معادلة المستوى المماس عند النقطة $P_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ هي

$$\begin{vmatrix} u^1 - u_0^1 & u^2 - u_0^2 & x^3 - x^3(u_0^\alpha) \\ 1 & 0 & x_1^3(u_0^\alpha) \\ 0 & 1 & x_2^3(u_0^\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

وكما من معادلة (6) معادلة العمودي فإننا نوجد في حالة صورة مونج معادلة العمودي على المستوى المماس باستخدام (8)

## الخطوط البارامترية على السطح :-

نعتبر سطحاً فى الفراغ تمثيله البارامترى هو

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) \qquad (1)$$

نعطى أحد البارامترين وليكن $v$ قيمة ثابتة $v_0$ اى نضع $v = v_0$ فيكون

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v_0) \qquad (2)$$

أى أن $\underline{r}$ داله فى $u$ فقط (حيث أن $v_0$ ثابت) أى أن

$$\underline{r} = \underline{r}(u) \qquad (3)$$

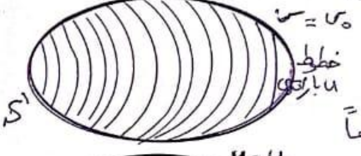
(3) هو التمثيل البارامترى للمنحنى فى الفراغ أى انه على السطح اذا اعطينا أحد البارامترين (وليكن $v$) قيمه ثابته فاننا نحصل على منحنى وسوف نسميه خط $u$ بارامترى

أما اذا اعطينا للسطح (1) قيمه ثابته للبارامتر $u$ فاننا نحصل على منحنى

$$\underline{r} = r(v) \qquad (4)$$

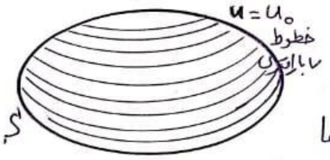
ونسمى هذا المنحنى خط $v$ بارامترى

باعطاء $v$ جميع القيم الثابته الممكنة نحصل لكل قيمه على خط $u$ بارامترى (عدد لا نهائى من خطوط $u$ بارامترى) وبالمثل اذا اعطينا $u$ جميع القيم الثابته الممكنة نحصل على خطوط $v$ بارامترى




وخطوط $u$ بارامترى، $v$ بارامترى لها الخصائص الآتية:

1. أى خطين بارامترين من نفس النوع لا يمكن أن يتقاطعا
2. أى نقطة على السطح لابد أن يمر بها خطان بارامتريان من نوعين مختلفين ولا يمر بها سواهما




3. أى خطين بارامترين من نوعين مختلفين لابد أن يتقاطعا فى نقطة واحدة.


## المنحنيات على السطح :-

نعتبر سطحاً تمثيله البارامترى

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) \qquad (1)$$

اذا عبرنا عن كل من $u, v$ بدلاله بارامتر ثالث $t$ أى أن $u = u(t),\ v = v(t)$

وبالتعويض فى (1)

$$\therefore \underline{r} = \underline{r}(u(t), v(t)) \qquad (2)$$

أى حصلنا على

$$\underline{r} = \underline{r}(t) \qquad (3)$$

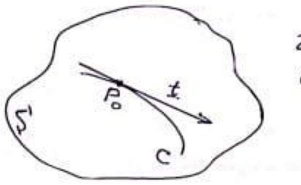
وهى معادلة منحنى فى الفراغ ويلاحظ أنه يجب يتحقق أن $\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) \neq (0,0)$

لأنه اذا كان $\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u = u_0 = \text{Const}$ وكذلك $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = v_0$ وعليه فإن (1) تعطى نقطة وليس سطحاً.

وكحاله خاصة: اذا كان $u = t,\ v = c$ نحصل على خط $u$ بارامترى واذا كان $u = c,\ v = t$ نحصل على خط $v$ بارامترى (حيث $c$ ثابت)

## التمثيل البارامترى للإتجاه على السطح :-

المماس على سطح يسمى إتجاه والآن نعتبر سطح فى الفراغ $S$
ومنحنى على هذا السطح $C$ ونقطة $P_0$ على هذا المنحنى ونعتبر أن معادلة
السطح معطاة بدلالة بارامترين $u^2 , u^1$ أى أن السطح معطى بالصورة




$$\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2) \tag{1}$$

ونفرض أن المنحنى $C$ الواقع على $S$ نحصل عليه بأخذ

$$u^1 = u^1(t) \quad , \quad u^2 = u^2(t) \tag{2}$$

∴ المتجه الآتى هو مماس للمنحنى $C$ (أى إتجاه على السطح $S$)

$$\boxed{\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u^1} \cdot \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial u^2} \cdot \frac{du^2}{dt}} \tag{3}$$

المعادلة (3) تعطى الإتجاه على المنحنى $C$
عند اى نقطة عليه وبالتالى الإتجاه عند $P_0$ والتى عندها $t=t_0$ هو

$$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{d\underline{r}}{du^1}\right)_{P_0} \left(\frac{du^1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{d\underline{r}}{du^2}\right)_{P_0} \left(\frac{du^2}{dt}\right)_{t_0} \tag{4}$$

فإذا رمزنا للمتجه $\left(\frac{d\underline{r}}{du^\alpha}\right)$ بالرمز $\underline{r}_\alpha$ وإذا رمزنا للكمية $\frac{du^\alpha}{dt}$ بالرمز $(u^\alpha)'$ فإننا
تمكننا إعادة كتابة الإتجاه (3) على الصورة :-

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = (u^1)' \underline{r}_1 + (u^2)' \underline{r}_2 \tag{5}$$

أو باستخدام اسلوب أينشتين للجمع

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = (u^\alpha)' \underline{r}_\alpha \tag{6}$$

يلاحظ أن الإتجاه $\frac{d\underline{r}}{dt}$ فى (5) تركيب خطى من المتجهين $\underline{r}_2$ و $\underline{r}_1$ حيث ضرب
$\underline{r}_1$ فى المقدار $(u^1)'$ وضرب $\underline{r}_2$ فى المقدار $(u^2)'$ وجمع الناتجان
نسمى المقدارين $(u^2)', (u^1)'$ مركبات الإتجاه $\frac{d\underline{r}}{dt}$ أو نقول أن $((u^1)', (u^2)')$ مركبات الإتجاه $\frac{d\underline{r}}{dt}$

### حالات خاصة :-

(أ) اذا اخذنا $u^2 = c$ (ثابت) ، $u^1 = t$ فإننا نحصل على خط $u^1$ بارامترى ويكون

$$(u^1)' = 1 \quad , \quad (u^2)' = 0$$

وعليه فإن الإتجاه لخط $u^1$ بارامترى يكون :-

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = (1)\underline{r}_1 + (0)\underline{r}_2 = \underline{r}_1$$

ونقول أن إتجاه خط $u^1$ بارامترى له الإتجاه $(1,0)$

(أأ) اذا اخذنا $u^2 = t$ ، $u^1 = c$ (ثابت) فإننا نحصل على خط $u^2$ بارامترى ويكون

$$(u^1)' = 0 \quad , \quad (u^2)' = 1$$

وعليه فإن الإتجاه لخط $u^2$ بارامترى يكون :-

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = (0)\underline{r}_1 + (1)\underline{r}_2 = \underline{r}_2$$

ونقول أن اتجاه خط $u^2$ بارامترى له الإتجاه $(0,1)$

ملاحظة : المعادلة (1) تكتب أيضاً : $\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha)$ والمعادلة (6) تكتب أيضاً $\frac{d\underline{r}}{dt} = \lambda^\alpha \underline{r}_\alpha$

## الصيغة المترية للسطح والكميات القياسية الأولى على السطح :-

نعتبر سطحاً معطى بالتمثيل البارامتري $\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha)$ ومنحنى واقع عليه معطى بالمعادلتين $u^\alpha = u^\alpha(t)$ , $\alpha = 1, 2$ المماس لهذا المنحنى هو

$$\underline{r}' = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}_1 (u^1)' + \underline{r}_2 (u^2)' = \underline{r}_\alpha (u^\alpha)' \qquad (1)$$

فإذا كانت $s$ هي المسافة القوسية على المنحنى $u^\alpha = u^\alpha(t)$ ومن معلوماتنا في دراسة المنحنيات نعلم أن $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|$

$$\therefore \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)^2 = \underline{r}' \cdot \underline{r}' = \underline{r}_\alpha (u^\alpha)' \cdot \underline{r}_\beta (u^\beta)'$$

$$= \underline{r}_\alpha \cdot \underline{r}_\beta \; \frac{du^\alpha}{dt} \cdot \frac{du^\beta}{dt}$$

نرمز للمقدار $\underline{r}_\alpha \cdot \underline{r}_\beta$ بالرمز $g_{\alpha\beta}$

$$\therefore \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} \qquad (2)$$

$$= g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\right)\left(\frac{du^2}{dt}\right) + g_{21}\left(\frac{du^2}{dt}\right)\left(\frac{du^1}{dt}\right) + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2$$

ولكن

$$g_{21} = \underline{r}_2 \cdot \underline{r}_1 = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = g_{12}$$

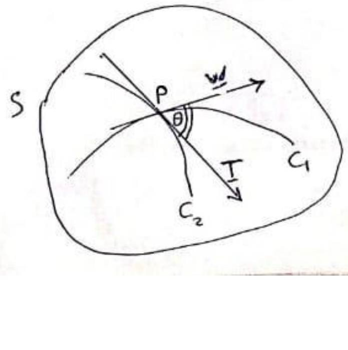
$$\therefore \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\right)\left(\frac{du^2}{dt}\right) + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 \qquad (3)$$

(3) تعطينا مربع عنصر المسافة القوسية على المنحنى $C$ الذي يقع على السطح $S$ وعليه بحذف $t$ من طرفي (3) فنحصل على $(ds)^2$ (مربع عنصر المسافة بين نقطتين متجاورتين)

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} \, du^\alpha du^\beta \qquad (4)$$

(4) تسمى الصيغة المترية للسطح أو الصيغة الأساسية الأولى على السطح وتسمى الكميات $g_{\alpha\beta}$ الكميات الأساسية الأولى على السطح.

## الزاوية بين اتجاهين على السطح :-




إذا كان $C_1, C_2$ منحنيين على السطح $S$ يتقاطعان عند نقطة $P$ وكانت $\theta$ هي الزاوية بين المماسين للمنحنيين $C_1, C_2$ عند $P$ أي $\theta$ الزاوية بين الاتجاهين $\underline{T}$ , $\underline{W}$ فإن $\theta$ تتعين من العلاقة

$$\underline{W} \cdot \underline{T} = |\underline{W}| . |\underline{T}| \cos\theta \qquad (1)$$

فاذا كان $\underline{W} = \mu^{\beta}\underline{r}_{\beta}$ ، $\underline{T} = \lambda^{\alpha}\underline{r}_{\alpha}$ فإن

$$\underline{T}^2 = \lambda^{\alpha}\underline{r}_{\alpha}\cdot\lambda^{\alpha}\underline{r}_{\alpha} = \underline{r}_{\alpha}\cdot\underline{r}_{\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} = g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}$$

$$= g_{11}(\lambda^1)^2 + 2g_{12}(\lambda^1)(\lambda^2) + g_{22}(\lambda^2)^2$$

$$\therefore |\underline{T}| = \sqrt{g_{11}(\lambda^1)^2 + 2g_{12}(\lambda^1)(\lambda^2) + g_{22}(\lambda^2)^2}$$

وبالمثل فان :-

$$|\underline{W}| = \sqrt{g_{11}(\mu^1)^2 + 2g_{12}(\mu^1)(\mu^2) + g_{22}(\mu^2)^2}$$

ويكون :-

$$\underline{T}\cdot\underline{W} = \lambda^{\alpha}\underline{r}_{\alpha} + \mu^{\beta}\underline{r}_{\beta} = \underline{r}_{\alpha}\cdot r_{\beta}\lambda^{\alpha}\mu^{\beta} = g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}$$

$$= g_{11}\lambda^1\mu^1 + g_{12}\lambda^1\mu^2 + g_{21}\lambda^2\mu^1 + g_{22}\lambda^2\mu^2$$

وبالتعويض في (1) نحصل على العلاقة الآتية التي تعطي الزاوية بين الاتجاه $\underline{T}$ والذي له المركبات $(\lambda^1, \lambda^2)$ والاتجاه $\underline{W}$ والذي له المركبات $(\mu^1, \mu^2)$ على السطح $\underline{S}$ الذي معادلته متجه موضع عند أي نقطة على السطح هي $\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2)$

$$\cos\theta = \frac{g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\mu^{\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}}\sqrt{g_{\alpha\beta}\mu^{\alpha}\mu^{\beta}}} \qquad (2)$$

مثال :-

عند نقطة تقاطع خطين بارامتريين (خط $u$ بارامتري ، خط $v$ بارامتري) اوجد شرط تعامدها .

الحل

الخط $u$ بارامتري المركبات $(\lambda^1, \lambda^2) = (1,0)$

والخط $v$ بارامتري له المركبات $(\mu^1, \mu^2) = (0,1)$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$\cos\theta = \frac{g_{11}\lambda^1\mu^1 + g_{12}\lambda^1\mu^2 + g_{21}\lambda^2\mu^1 + g_{22}\lambda^2\mu^2}{\sqrt{g_{11}(\lambda^1)^2 + 2g_{12}\lambda^1\lambda^2 + g_{22}(\lambda^2)^2}\sqrt{g_{11}(\mu^1)^2 + 2g_{12}\mu^1\mu^2 + g_{22}(\mu^2)^2}}$$

وبالتعويض $\lambda^1 = 1,\ \lambda^2 = 0,\ \mu^1 = 0,\ \mu^2 = 1$

$$\therefore \cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$$

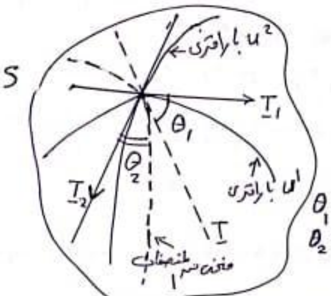
ويكون شرط التعامد بين الخطين البارامتريين هو $\cos\theta = 0$ اي ان شرط التعامد هو

$$g_{12} = 0$$

مثال (2)

اثبت أن المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات على السطح التي تنصف الزاوية بين الخطوط البارامترية هي:-

$$g_{11}(du^1)^2 = g_{22}(du^2)^2$$




الحل

نفرض أن مركبات منصف الزاوية بين خطي $u^1$ ، $u^2$ بارامتري هي

$$(du^1, du^2)$$

وأن هذا المنحنى يصنع مع خط $u^1$ بارامتري (والذي مركباته هي $(1,0)$) زاوية $\theta_1$

وأن هذا المنحنى يصنع مع خط $u^2$ بارامتري (والذي مركباته هي $(0,1)$) زاوية $\theta_2$

$$\therefore \cos\theta_1 = \frac{g_{11}(\lambda^1)(du^1) + g_{12}(\lambda^1)(du^2) + g_{21}(\lambda^2)(du^1) + g_{22}(\lambda^2)(du^2)}{\sqrt{g_{11}(\lambda^1)^2 + 2g_{12}(\lambda^1)(\lambda^2) + g_{22}(\lambda^2)^2}\sqrt{g_{\alpha\beta}(du^\alpha)(du^\beta)}}$$

$$= \frac{g_{11}(du^1) + g_{12}(du^2)}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{\alpha\beta}(du^\alpha)(du^\beta)}}$$

وبالمثل نجد أن

$$\cos\theta_2 = \frac{g_{21}(du^1) + g_{22}du^2}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{\alpha\beta}(du^\alpha)(du^\beta)}} = \frac{g_{12}(du^1) + g_{22}(du^2)}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{\alpha\beta}(du^\alpha)(du^\beta)}} \quad (g_{21} = g_{12} \text{ لأن})$$

وحيث أن $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$

$$\therefore \frac{g_{11}(du^1) + g_{12}(du^2)}{\sqrt{g_{11}}\cancel{\sqrt{g_{\alpha\beta}(du^\alpha)(du^\beta)}}} = \frac{g_{12}(du^1) + g_{22}(du^2)}{\sqrt{g_{22}}\cancel{\sqrt{g_{\alpha\beta}(du^\alpha)(du^\beta)}}}$$

بتربيع الطرفين والاختصار نحصل على المطلوب. انتهى المثال

---

## مميز الصيغة المترية :

المقدار $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ يسمى مميز الصيغة المترية وعليه اثبات انه مقدار موجب وعليه كتابته على شكل محدد أي:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = |g_{\alpha\beta}|$$

## وحدة العمودي على السطح :-

اذا اعطي السطح بالصورة

$$\underline{X} = \underline{X}(u^\alpha)$$

فإننا سبق أن وضحنا أن المماس في اتجاه خط $u$ بارامتري هو $\underline{X}_1$ وكذلك بينا أن المماس في اتجاه خط $u^2$ بارامتري هو $\underline{X}_2$ (راجع الحالات الخاصة في الجزء الخاص بالتمثيل البارامتري لاتجاه على السطح) كما سبق وأن ذكرنا أن جميع المماسات للمنحنيات على سطح تقع في مستوى واحد يسمى المستوى المماس ، اذن كل من $\underline{r}_2$ , $\underline{r}_1$ يقعان في المستوى المماس ∴ $\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2$ هو متجه عمودي على المستوى المماس

وبالتالي فإن وحدة العمودي على السطح عند نقطة عليه (والرمز لهذه الوحدة بالرمز $\underline{n}$) تعطى بالعلاقة

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|}$$

ولكن من حساب المتجهات عكس إثبات أن لأي متجهين $\underline{a}, \underline{b}$

$$|\underline{a} \wedge \underline{b}|^2 = \underline{a}^2 \underline{b}^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$$

وعليه فإن

$$|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|^2 = (\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_1)(\underline{r}_2 \cdot \underline{r}_2) - (\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2)^2$$

$$= g_{11} \cdot g_{22} - (g_{12})^2 = g$$

$$\therefore |\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2| = \sqrt{g}$$

$$\boxed{\therefore \underline{n} = \frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{\sqrt{g}} \quad \text{وحده العمودي عند نقطة على سطح}}$$

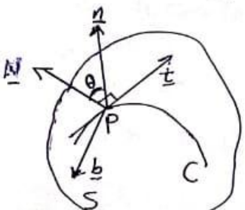
## الكميات الأساسية الثانية والصيغة الأساسية الثانية والانحناء العمودي على السطح

نعتبر سطحاً في الفراغ تمثيله البارامتري هو

$$\underline{X} = X(u^\alpha) \qquad (1)$$

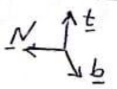
ومنحنى على هذا السطح معطى بارامترياً حيث البارامتر هو البارامتر الطبيعي $s$ (المسافة القوسية)
فتكون المعادلة الاتجاهية لهذا المنحنى هي

$$\underline{X} = X(u^\alpha(s)) \qquad (2)$$



لتكن $P$ هي إحدى نقط هذا المنحنى $c$ ، $\underline{t}$ هي وحدة المماس له عند $P$
ولتكن $\underline{N}$ هي وحدة العمود الأساسي للمنحنى عند $P$
ولتكن $\underline{n}$ هي وحدة العمودي للسطح عند $P$
فإذا كانت $\theta$ هي الزاوية بين $\underline{N}, \underline{n}$ فإن

$$\cos\theta = \underline{N}\cdot\underline{n} \qquad (3)$$



$$\underline{t} = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds} = \underline{X}_1\frac{du^1}{ds} + \underline{X}_2\frac{du^2}{ds}$$

$$\therefore \underline{t} = \dot{\underline{X}} = \underline{X}_\alpha (u^\alpha)^{\cdot} \qquad (4)$$

بتفاضل (4) مرة ثانية بالنسبة إلى $s$

$$\therefore \frac{d\underline{t}}{ds} = \ddot{\underline{X}} = k\underline{N} = \frac{d}{ds}\left(\underline{X}_\alpha (u^\alpha)^{\cdot}\right)$$

$$\therefore \ddot{\underline{X}} = k\underline{N} = (u^\alpha)^{\cdot}\left(\frac{d}{ds}\underline{X}_\alpha\right) + \underline{X}_\alpha (u^\alpha)^{\cdot\cdot} \qquad (5)$$

ولكن $\underline{X}_\alpha$ دالة في كل من $u^1, u^2$

$$\therefore \frac{d}{ds}(\underline{X}_\alpha) = \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\underline{X}_\alpha\right)\left(\frac{du^1}{ds}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\underline{X}_\alpha\right)\left(\frac{du^2}{ds}\right), \quad \alpha = 1,2$$

فإذا رمزنا للمتجه $\frac{\partial}{\partial u^\beta}\underline{X}_\alpha = \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ بالرمز $\underline{X}_{\alpha\beta}$

$$\therefore \frac{d}{ds}\underline{X}_\alpha = \underline{X}_{1\alpha}(u^1)' + \underline{X}_{2\alpha}(u^2)' = \underline{X}_{\alpha\beta}(u^\beta)^{\cdot} \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) في (5) نحصل على

$$\ddot{\underline{X}} = k\underline{N} = \underline{X}_{\alpha\beta}(u^\alpha)^{\cdot}(u^\beta)^{\cdot} + \underline{X}_\alpha (u^\alpha)^{\cdot\cdot} \qquad (7)$$

وبضرب طرفي (7) في $\underline{n}$ مع ملاحظة أن $\underline{X}_\alpha \perp \underline{n}$ ( $\underline{n}$ عمودي على المستوى المماس الذي يحوي $\underline{X}_\alpha$)

$$\therefore k\underline{N}\cdot\underline{n} = \underline{n}\cdot\underline{X}_{\alpha\beta}(u^\alpha)^{\cdot}(u^\beta)^{\cdot} + 0$$

نرمز عادة للمقدار $\underline{n}\cdot\underline{X}_{\alpha\beta}$ بالرمز $l_{\alpha\beta}$

وحيث أن $\underline{n} = \dfrac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{\sqrt{g}}$

$$\therefore \ell_{\alpha\beta} = \underline{n} \cdot \underline{x}_{\alpha\beta} = \frac{(r_1 \wedge r_2)}{\sqrt{g}} \cdot x_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\underline{r}_1 , \underline{r}_2 , \underline{r}_{\alpha\beta})$$

$$\therefore k \cos\theta = k \ . \underline{n} = \ell_{\alpha\beta} (u^\alpha)^{\cdot} (u^\beta)^{\cdot}$$

$$\Rightarrow k \cos\theta = \ell_{\alpha\beta} \left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)\left(\frac{du^\beta}{ds}\right) = \ell_{\alpha\beta} \frac{(du^\alpha)(du^\beta)}{(ds)^2}$$

وبالتعويض عن $(ds)^2$ (راجع الصيغة المترية للسطح)

$$\therefore k \cos\theta = \frac{\ell_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}{g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}$$

تسمى الصيغة $\ell_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$ الصيغة الأساسية الثانية ونرمز لها بالرمز II
وكنا قد ذكرنا ان الصيغة $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ تسمى الصيغة الأساسية الأولى ولذ رمز لها بالرمز I
وعلى ذلك فان

$$k \cos\theta = \frac{\ell_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \qquad (8)$$

وكما سبق أن عرفنا مميز الصيغة الأساسية الأولى $g$ حيث $g = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2$ (9)

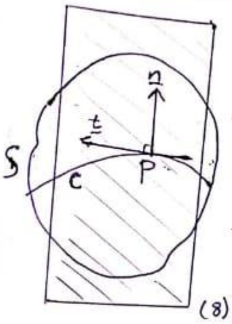
فاننا سنعرف مميز الصيغة الأساسية الثانية $\ell$ حيث $\ell = \ell_{11} \ell_{22} - (\ell_{12})^2$ (10)

وسنعرف أيضا ما يسمى الكميات الأساسية الأولى المرافقة $g^{\alpha\beta}$ وتعرف ببساطة بأنها عناصر مقلوب المصفوفة $(g_{\alpha\beta})$ أى أن

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = (g_{\alpha\beta})^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$ (وكما نعلم $g_{12} = g_{21}$)

أى أن

$$(11) \quad g^{11} = \frac{g_{22}}{g} , \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{g} = \frac{-g_{21}}{g} , \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$




نعتبر الحالة فيها المنحنى $\underline{r} = \underline{r}(u^{\alpha}(s))$ عبارة عن تقاطع السطح مع مستوى مار بوحدة العمودى $\underline{n}$ على المستوى المماس للسطح عند نقطة P عليه فيكون المقطع بالطبع منحنى مستوى. يسمى مثل هذا المقطع "مقطع عمودى على السطح عند P" بالنسبة لهذا المنحنى الوحدات $\underline{N}$ و $\underline{t}$ تقع فى مستوى واحد هو المستوى الموجود فيه المقطع العمودى وبالتالى احتوى على $\underline{n}$ أيضا أى أن $\underline{n}, \underline{N}, \underline{t}$ تقع فى مستوى واحد وحيث أن $\underline{t}$ عمودى على كل من $\underline{n}$ و $\underline{N}$ فان $\underline{n} = \underline{N}$

وعليه فان الزاوية $\theta$ بين $\underline{n}, \underline{N}$ تساوى صفر وعليه فان $\cos\theta = 1$ وبالتعويض فى (8) مع الرمز للانحناء $k$ فى هذه الحالة (حالة المقطع العمودى) بالرمز $k_n$

$$\therefore k_n = \frac{II}{I} \qquad (12)$$

وحيث أن الانحناء $k$ لأى منحنى آخر على السطح غير مقطع عمودى هو :-

$$k \cos\theta = \frac{II}{I}$$

$$\therefore k\cos\theta = k_n \Rightarrow |k| \geq |k_n| \qquad (13)$$

المتباينة (13) تنص على أن :- عند أى نقطة P على سطح ما تكون القيمة المطلقة لانحناء المقطع العمودى أصغر من القيمة المطلقة للإنحناء عند النقطة P لأى منحنى على السطح وليس مقطعاً عمودياً .

الآن لنجعل هذا المقطع العمودى يدور دورة كاملة $(2\pi)$ حول العمودى $\underline{n}$ فسوف تتغير قيمة $k_n$ تغيراً متصلاً وستأخذ $k_n$ خلال دوران المقطع العمودى قيمة عظمى وقيمة صغرى سنرمز لهاتين القيمتين بالرموز $k_1, k_2$ ونسميها الانحنائين الأساسيين للسطح عند النقطة P . أيضا فإن :-

(i) المتوسط الحسابى للانحنائيين الأساسيين يسمى الإنحناء المتوسط ويرمز له بالرمز $H$ أى أن

$$2H = k_1 + k_2 = g^{\alpha\beta} \ell_{\alpha\beta} \qquad (14)$$

(ii) كما أن حاصل ضرب الإنحنائيين الأساسيين يسمى الإنحناء الجاوسى ويرمز له بالرمز $K$ أى أن

$$K = k_1 k_2 = \frac{\ell}{g}$$

أمثلة

1) أوجد الانحناء المتوسط $H$ والانحناء الجاوسي للسطح $\underline{r} = (u^1+u^2, u^1-u^2, u^1u^2)$
عند النقطة $P(2, 0, 1)$

الحل
نعين أولاً قيمة $u^1, u^2$ عند النقطة $P$

$$u^1+u^2 = 2, \quad u^1-u^2 = 0, \quad u^1u^2 = 1 \quad \Rightarrow u^1 = u^2 = 1$$

عند النقطة $P$ فان

$$\underline{r}_1 = (1, 1, u^2) \qquad \underline{r}_1 = (1,1,1) \qquad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

$$\underline{r}_2 = (1, -1, u^1) \qquad \underline{r}_2 = (1,-1,1) \qquad , g = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\underline{r}_{11} = (0,0,0) \qquad \underline{r}_{11} = (0,0,0)$$

$$\underline{r}_{12} = (0,0,1) \qquad \underline{r}_{12} = (0,0,1)$$

$$\underline{r}_{22} = (0,0,0) \qquad \underline{r}_{22} = (0,0,0)$$

$$(\underline{r}_1)^2 = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_1 = (1)^2 + (1)^2 + (u^2)^2 = 2 + (u^2)^2 \qquad (r_1)^2 = 3 = g_{11}$$

$$\underline{r}_1 \underline{r}_2 = (1) + (-1) + u^1u^2 = u^1u^2 \qquad (r_1)(r_2) = 1 = g_{12} = g_{21}$$

$$(\underline{r}_2)^2 = (\underline{r}_2) \cdot (\underline{r}_2) = 2 + (u^1)^2 \qquad (r_2)^2 = 3 = g_{22}$$

$$\ell_{11} = \frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_{11}) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\ell_{12} = \ell_{21} = \frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_{12}) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\ell_{22} = \frac{1}{\sqrt{8}}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_{22}) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ell = (\ell_{11})(\ell_{22}) - (\ell_{12})^2 = -\frac{1}{2}$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{3}{8}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-g_{12}}{g} = \frac{-1}{8}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} = \frac{3}{8}$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{\ell}{g} = \frac{-\frac{1}{2}}{8} = \frac{-1}{16}$$

$$2H = g^{\alpha\beta}\ell_{\alpha\beta} = [g^{11}\ell_{11} + 2g^{12}\ell_{12} + g^{22}\ell_{22}]$$

$$= 2\left(\frac{-1}{8}\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

---

2) إثبت أن الزاوية التي يتقاطع عندها خط $x^1$ البارامتري مع خط $x^2$ البارامتري على السطح $x^3 = ax^1x^2$ عند النقطة $(x_0^1, x_0^2, ax_0^1x_0^2)$ تعطى من العلاقة

$$\cos\theta = \frac{a x_0^3}{\sqrt{1 + (ax_0^1)^2 + (ax_0^2)^2 + (ax_0^3)^2}}$$

الحل

معادلة السطح هي

$$\underline{r} = (x^1, x^2, a x^1 x^2)$$

$$\underline{r}_1 = (1, 0, a x^2)$$

$$\underline{r}_2 = (0, 1, a x^1)$$

$$g_{11} = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_1 = 1 + (a x^2)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = \underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = a^2 x^1 x^2$$

$$g_{22} = \underline{r}_2 \cdot \underline{r}_2 = 1 + (a x^1)^2$$

الزاوية بين الخطوط البارامترية تعطى بالعلاقة :-

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{a^2 x^1 x^2}{\sqrt{1+(a x^2)^2}\sqrt{1+(a x^1)^2}}$$

$$= \frac{a.(a x^1 x^2)}{\sqrt{[1+(a x^2)^2][1+(a x^1)^2}}$$

$$= \frac{a x^3}{\sqrt{1+(a x^1)^2 + (a x^2)^2 + a^2 (a x^1 x^2)^2}}$$

$$= \frac{a x^3}{\sqrt{1+(a x^1)^2 + (a x^2)^2 + a}}$$

وعند النقطة P نحصل على المطلوب .

---

3) إثبت أن الخطوط البارامترية على السطح $z = axy$ المارة بالنقطة $(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ تتقاطع بزاوية $\frac{\pi}{3}$

الحل

نأخذ $x = u^1 , y = u^2$ فتكون معادلة السطح هي

$$\underline{r} = (u^1, u^2, a u^1 u^2)$$

$$\therefore \underline{r}_1 = (1, 0, a u^2) \Rightarrow g_{11} = 1 + (a u^2)^2 \quad , g_{12} = a^2 u^1 u^2$$

$$\underline{r}_2 = (0, 1, a u^1) \Rightarrow g_{22} = 1 + (a u^1)^2$$

والزاوية بين خطي $u^1, u^2$ البارامتريين تعطى بالعلاقة

$$\cos\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} = \frac{a^2 u^1 u^2}{\sqrt{1+(a u^2)^2}\sqrt{1+(a u^1)^2}}$$

وعند النقطة P فإن $u^1 = u^2 = u^3 = \frac{1}{a}$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$