## معادلات هاملتون :

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad ; \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_x \quad ; \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m} p_y \quad ; \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (6)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} p_z \quad ; \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

مجموعة معادلات هاملتون القانونية (6) هي ست معادلات تفاضلية من الرتبة الاولى وصف هذه المعادلات نكون قد حصلنا عليه خلال ايجاد دالة هاملتون .

---

1- منظومة ديناميكية طاقة حركتها هي

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_2^{\,2}\right)$$

وطاقة جهد ما

$$U = (q_1 - q_2)^2 .$$

اوجد دالة هاملتون للمنظومة ومعادلات هاملتون القانونية .بين احد اثباتات العزم وكميات حركة العزم للمنظومة .

---

في هذه المسألة يمكن كتابة الدالة $H$ مباشرة بالصورة

$$H = \tfrac{1}{2}\left(\dot{q}_1^{\,2} + \dot{q}_2^{\,2}\right) + (q_1 - q_2)^2 \qquad (1)$$

حيث أن
$$P_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}$$

فان
$$P_1 = \dot{q}_1 \quad , \quad P_2 = \dot{q}_2$$

وبالتعويض في (1) نحصل على دالة هاملتون المنشودة حيث:

$$H(p_s, q_s) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_1 - q_2)^2 \qquad (1)$$

معادلات هاملتون القانونية :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 \qquad (a)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 \qquad (b)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -2(q_1 - q_2) \qquad (c)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = 2(q_1 - q_2) \qquad (d)$$

من المعادلات (a) & (c) , (b) , (d) نحصل على (2)

$$\ddot{q}_1 + 2(q_1 - q_2) = 0 \qquad (3)$$

$$\ddot{q}_2 - 2(q_1 - q_2) = 0 \qquad (4)$$

(4) , (3)

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0$$

وباجراء التكامل نحصل على

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = const. = A$$

وباجراء التكامل مره اخرى نحصل على

$$q_1 + q_2 = At + const. = At + B \qquad (4)$$

$$q_2 = At + B - q_1$$

بالتعويض من (4) فى (2) نحصل على

$$\ddot{q}_1 + 2\left[2q_1 - (At + B)\right] = 0$$

$$\ddot{q}_1 + 4q_1 = 2(At + B) \qquad (5)$$

الحل العام للمعادلة (5) هو :

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}$$

حيث $q_1^{(1)}$ هو الحل العام للمعادلة

$$\ddot{q}_1^{(1)} + 4q_1^{(1)} = 0$$

أى أن

$$q_1^{(1)} = c \sin(2t + \epsilon) \qquad (ii)$$

حيث $c$ & $\epsilon$ هما كميتان ثابتتان

$q_1^{(2)}$ هو الحل الخاص للمعادلة (5) أى أن

$$q_1^{(2)} = \frac{1}{D^2+4}\; 2\,(At + B)$$

$$= \frac{2}{4}\;\frac{1}{(1+\frac{1}{4}D^2)}\;(At + B)$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 + \frac{1}{4}D^2)^{-1}\,(At + B)$$

$$q_1^{(2)} = \tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{D^2}{4} + \left(\frac{D^2}{4}\right)^2 + \dots\right](At + B)$$

$$q_1^{(2)} = \tfrac{1}{2}(At + B)$$

(iii)

وعلى ذلك فالحل العام للمعادلة (5) هو

$$q_1 = \tfrac{1}{2}(At+B) + c \sin(2t + \epsilon)$$

وبكتابة $b=\frac{1}{2}B$ , $a=\frac{1}{2}A$ نحصل على

$$q_1 = at + b + c \sin(2t + \epsilon) \qquad (6)$$

بالتعويض من (6) في (4) نحصل على

$$q_2 = at + b - c \sin(2t + \epsilon) \qquad (7)$$

بالتعويض من (7)،(6) في (a) ، (b) نحصل على

$$p_1 = a + 2c \cos(2t + \epsilon) \qquad (8)$$

$$p_2 = a - 2c \cos(2t + \epsilon) \qquad (9)$$

٥- أثبت أنه إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ديناميكية هي

$$L = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} a_{j,k}(q)\, \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q)$$

حيث

$$a_{j,k}(q) = a_{k,j}(q)$$

فإن دالة هاملتون للمنظومة تكون

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_{j,k} a^{j,k}(q)\, p_j p_k + U(q)$$

حيث المعاملات $a^{j,k}$ تعين من مجموعة المعادلات

$$\sum_j a^{L,j}\, a_{k,j} = \delta_{L,k}$$

$$\boxed{\delta_{L,k} = \begin{cases} 0 & L \neq k \\ 1 & L = k \end{cases}}$$

حيث ان داله لاجرانج للمنظومه هى

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{j,k}\,\dot{q}_j\dot{q}_k - U(q) \qquad (1)$$

اذن الدالة الهاملتون

$$E = \sum_s p_s\dot{q}_s - L = \sum_s p_s\dot{q}_s - \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{j,k}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k + U(q) \qquad (2)$$

من (1)

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \sum_L a_{L,s}(q)\,\dot{q}_L \qquad (3)$$

بضرب طرفى المعادله (3) فى $\dot{q}_s$ والجمع على جميع قيم s نحصل على

$$\sum_s p_s\dot{q}_s = \sum_{s,L} a_{L,s}(q)\,\dot{q}_L\dot{q}_s$$

بالتعويض فى (2) نحصل على

$$E = \frac{1}{2}\sum_s p_s\dot{q}_s + U(q) \qquad (4)$$

من (3)

$$p_k p_s = \sum_L a_{L,s}(q)\,\dot{q}_L\,p_k$$

بضرب طرفى المعادله السابقه فى المعاملات $a^{k,s}$

ثم الجمع على جميع قيم s&k نحصل على

$$\sum_{s,k} a^{k,s}p_k p_s = \sum_{L,k}\Big(\sum_s a^{k,s}a_{L,s}\Big)\dot{q}_L p_k$$

وحيث انه

$$\sum_s a^{k,s}a_{L,s} = \delta_{L,k}$$

فان

$$\sum_{s,k} a^{k,s}p_k p_s = \sum_{L,k}\delta_{L,k}\,\dot{q}_L p_k = \sum \dot{q}_k p_k$$

أى أن

$$\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s p_s = \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a^{k,s}(q)\, p_s p_k \qquad (5)$$

بالتعويض فى (4) نحصل على داله هاملتون الاتيه •

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s,k} a^{k,s}\, p_s p_k + U(q) \qquad (6)$$

**ملحوظه :** يمكن حل هذه المسأله بالطريقه التاليه •

بضرب طرفى المعادله (3) فى $a^{k,s}$ والجمع على جميع قيم $s$ نحصل على

$$\sum_{s} a^{k,s} p_s = \sum_{L} \Big( \sum_{s} a^{k,s} a_{L,s} \Big) \dot{q}_L$$

$$= \sum_{L} \delta_{L,k}\, \dot{q}_L = \dot{q}_k$$

أى أن ......

(7)

$$\dot{q}_k = \sum_{s} a^{k,s} p_s$$

من (7)

$$\dot{q}_s = \sum_{j} a^{j,s} p_j$$

بالتعويض فى (4) نحصل على داله هاملتون الاتيه .

$$H = \frac{1}{2} \sum_{s,j} a^{j,s}\, p_s p_j + U(q)$$

# الفصل الرابع

## الاحداثيات الدوريه أو المتجاهله ، دالة راوس

## Cyalic or Ignorable Coordinates , The Routhian

اعتبر منظومه ميكانيكيه لها $n$ من احداثيات التعميم $(s=1,2,\dots,n)$ $q_s$ داله لاجرانج لهذه المنظومه $L$ هى داله – على وجه العموم – فى جميع احداثيات التعميم $q_s$ وجميع سرعات التعميم $\dot{q}_s$ وقد تعتمد – أيضا – صراحه على الزمن $t$ أى أن

$$L = L(q_s, \dot{q}_s, t) \qquad s=1,2,\dots,n$$

ولكن ولبعض المنظومات ونتيجه لاختيار مجموعه معينه من الاحداثيات والتى عددها $n$ احداثى عموم قد لا تظهر بعض احداثيات التعميم فى داله لاجرانج فى حين تظهر سرعات التعميم المناظرة لهذه الاحداثيات فى داله لاجرانج .

تسمى احداثيات التعميم التى لا تظهر فى داله لاجرانج بالاحداثيات الدوريه اما الاحداثيات التى تظهر فى داله لاجرانج فتسمى بالاحداثيات غير الدوريه .

عند دراسه حركه منظومه ميكانيكيه لها $n$ من احداثيات التعميم باستخدام معادلات لاجرانج فانه يلزم حل مجموعه المعادلات

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right) = 0 \;;\; s=1,2,\dots,n$$

وهذه المجموعه من المعادلات هى $n$ معادله تفاضليه من الرتبه الثانيه .

لكنه فى حاله اختيار احداثيات التعميم بحيث يوجد بينهما عدد من الاحداثيات الدوريه فانه يمكن اختزال مجموعه المعادلات التفاضليه التى يجب حلها آنيا بحيث يصبح عدد هذه المعادلات مساويا لعدد احداثيات التعميم غير الدوريه وذلك باستخدام داله جديده تسمى بداله راوس مما يسهل كثيرا حل المسائل .

والان ، اعتبر منظومه ميكانيكيه لها $n$ من احداثيات التعميم وامكن اختيار مجموعه احداثيات

العمم ( بحيث يكون بينها k من الاحداثيات غير الدوريه و ( n-k ) احداثي د...
في هذه الحالة تأخذ دالة لاجرانج الصوره

$$L(q_s, \dot{q}_s; \dot{q}_j, t) \; ; \; s=1,2,\ldots,k \qquad (1)$$
$$j=k+1,\ldots,n$$

والان بكتابه الاحداثيات الدوريه على الصوره

فان

$$q_j = r_j$$

$$\dot{q}_j = \dot{r}_j$$

وبالتعويض في (1) فان دالة لاجرانج تأخذ الصوره

$$L=L(q_s, \dot{q}_s; \dot{r}_j, t) \; ; \; s=1,2,\ldots,k; \; j=k+1;\ldots,n \qquad (1')$$

والان اعتبر الداله R المعرفه بالعلاقه

$$R = L(q_s, \dot{q}_s; \dot{r}_j, t) - \sum_{j=k+1}^{n} \dot{r}_j p_j$$

حيث يتم التجميع على جميع الاحداثيات الدوريه والاحداثيات الدوريه فقط .

وحيث أن

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = P_j$$

وبالتعويض في معادلات لاجرانج

أي أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right) = 0$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = \text{const.} = \beta_j$$

حيث

$$\beta_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = \beta_j\ (q_s, \dot{q}_s; \dot{r}_i, t) \qquad i=k+1, \ldots, n \qquad (2)$$

وبالتعويض فى الدالة $R$ فانه يمكن كتابتها على الصورة

$$R = L(q_s, \dot{q}_s; \dot{r}_j, t) - \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\, \dot{r}_j \qquad (3)$$

والان التغير الكلى $\delta R$ فى الدالة $R$ المعرفة بالعلاقة (3) هو

$$\delta R = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\delta \dot{r}_j + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

$$- \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\, \delta \dot{r}_j - \sum_{j=k+1}^{n} \dot{r}_j\, \delta \beta_j$$

وبالتعويض فى العلاقة السابقة $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = \beta_j$ نحصل على

$$(I)\ \delta R = \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta \dot{q}_s - \sum_{j=k+1}^{n} \dot{r}_j\, \delta \beta_j + \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta t$$

والان بحل مجموعة المعادلات (2) والتى عددها $(n-k)$ معادلة فى مجموعة المجاهيل $\dot{r}_j$ والتى عددها - ايضا - $(n-k)$ مجهول نحصل على

$$\dot{r}_j = \dot{r}_j\ (q_s, \dot{q}_s; \beta_j, t)$$

حيث

$s=1,2,\ldots,k$ ; $i=k+1,k+2,\ldots,n$ ; $j=k+1,\ldots,n.$

وبالتعويض فى ~~(3)~~ ~~نحـ~~ على

$$R = R\ (q_s, \dot{q}_s; \beta_j, t)\ ; \quad s=1,2,\ldots,k; j=k+1;\ \ldots, n \qquad (3)$$

الدالة $R$ المعرفة بالعلاقة (3) تسمى بدالة راوس The Routhian, التغير الكلى $\delta R$ فى الدالة $R$ المعرفة بالعلاقة (3) هو

$$\delta R = \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial R}{\partial q_s}\right)\delta q_s + \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta \dot{q}_s + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial \beta_j}\right)\delta \beta_j + \frac{\partial R}{\partial t}\delta t \qquad (II)$$

وحيث أن (I) تتطابق مع (II) فان

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial q_s}\right)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s}\right) \qquad s=1,2,\dots,k \qquad \text{(III)}$$

$$\dot{r}_j = -\left(\frac{\partial R}{\partial \beta_j}\right) \qquad j=k+1,\dots,n \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$

والمعادله الاخيره تبين أنه اذا لم يظهر الزمن صراحه في داله لاجرانج أي اذا كان $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ فان داله راوس لا تعتمد اعتمادا صريحا على الزمن أي $\frac{\partial R}{\partial t} = 0$ . بالتعويض .. (III) في معادلات لاجرانج

نحصل على

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_s}\right) - \left(\frac{\partial R}{\partial q_s}\right) = 0 \; ; \qquad s=1,2,\dots,k \qquad \text{(IV)}$$

مجموعه المعادلات (V) هي $k$ معادله تفاضليه من الرتبه الثانيه في $k$ مجهول وهذه المجاهيل هي احداثيات العموم غير الدوريه $q_s$ . وعلى ذلك فتعيين احداثيات العموم غير الدوريه يتم بحل مجموعه المعادلات (V) .

اما تعيين احداثيات العموم الدوريه فيتم تعيينها باستخدام مجموعه المعادلات (IV) أي باجراء مجموعه التكاملات

$$r_j = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_j}\, dt \; ; \qquad j=k+1,\dots,n \qquad \text{(VI)}$$

بحيث المعادلات VI عددها (n-k) والجزء الثانى يتم تعيين احداثيات السمت الدوريه — وعلى ذلك نجموعه المعادلات (V) & (VI) كافى لتعيين احداثيات السمت (الدوريه وغير الدوريه) للمنظومه كدوال فى الزمن .

## الحركه المنتظمه Steady Motion

اعتبر منظومه لها n من احداثيات السمت . ونفرض أن k من هذه الاحداثيات هى احداثيات غير دوريه و (n-k) احداثيات دوريه فانه يقال بأن حركة المنظومه هى حركه منتظمه اذا كانت حركة المنظومه تتم بحيث تكون جميع الاحداثيات غير الدوريه ثابته طوال الحركه وكذلك سرعات السمت المناظره لاحداثيات الدوريه ثابته طوال الحركه

أى أن داله لاجرانج

$$L = L(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j, t)$$

تأخذ الصوره

$$L = L(\alpha_s, 0, \Omega_j, t)$$

حيث $\alpha_s = \text{const.}$ وكذلك $\Omega_j = \text{const.}$

واذا لم تعتمد داله لاجرانج — وبالتالى داله راوس — اعتمادا صريحا على الزمن اى اذا كان

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right) = 0$$

فان فى حالة الحركه المنتظمه تكون

$$L(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j) = L(\alpha_s, 0, \Omega_j) = \text{const.}$$

### شرط انتظام الحركه :

اعتبر الحاله التى لا تعتمد فيها داله لاجرانج صراحه على الزمن أى

$$L = L(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j) \quad ; \quad s = 1, 2, \ldots, k \quad ; \quad j = k+1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = f_s(q_h, \dot{q}_h, \dot{r}_j) \; ; \; h = 1,2,\dots,k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = \sum_{h=1}^{k}\left(\frac{\partial f_s}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h + \sum_{h=1}^{k}\left(\frac{\partial f_s}{\partial \dot{q}_h}\right)\ddot{q}_h + \sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial f_s}{\partial \dot{r}_j}\right)\ddot{r}_j$$

وبالتعويض فى معادلات لاجرانج اى

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right) = 0$$

نحصل على

$$\sum_{h=1}^{k}\left(\frac{\partial f_s}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h + \sum_{h=1}^{k}\left(\frac{\partial f_s}{\partial \dot{q}_h}\right)\ddot{q}_h + \sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{\partial f_s}{\partial \dot{r}_j}\right)\ddot{r}_j - \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right) = 0 \qquad (1)$$

حيث s تأخذ القيم

$$s = 1,2,\dots,k$$

والان فى حالة الحركة المنتظمة يكون

$$q_h = \alpha_h \Longrightarrow \dot{q}_h = \ddot{q}_h = 0 \quad \& \quad \dot{r}_j = \Omega_j \Longrightarrow \ddot{r}_j = 0$$

بالتعويض فى (١) نحصل على

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{q=\alpha,\ \dot{q}=0,\ \ddot{q}=0,\ \dot{r}=\Omega,\ \ddot{r}=0} = 0 \; ; \quad s = 1,2,\dots,k \qquad (2)$$

وكذلك

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = g_j(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_m) \quad , \; m = k+1,\dots,n$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial g_j}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial g_j}{\partial \dot{q}_s}\right)\ddot{q}_s + \sum_{m=k+1}^{n}\left(\frac{\partial g_j}{\partial \dot{r}_m}\right)\ddot{r}_m$$

وبالتعويض فى معادلات لاجرانج نحصل على

$$\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial g_j}{\partial q_s}\right)\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial g_j}{\partial \dot{q}_s}\right)\ddot{q}_s + \sum_{m=k+1}^{n}\left(\frac{\partial g_j}{\partial \dot{r}_m}\right)\ddot{r}_m - \left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right) = 0 \qquad (3)$$

Generated by CamScanner

حيث أخذ القيم $j=k+1,\dots,n$

في حالة الحركة المنتظمة فان

$$q_s=\alpha_s \Rightarrow \dot{q}_s=\ddot{q}_s=0 \;\&\; \dot{r}_n=\Omega_n \Rightarrow \ddot{r}_n=0 \;\&\; \left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right)=0$$

وعلى ذلك فالمعادلات (3) تتحقق دائما ولجميع قيم

$$q_s=\alpha_s \;;\; \dot{r}_n=\Omega_n$$

ويكون شرط انتظام الحركة هو ان تتحقق مجموعة المعادلات

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_0=0 \quad ; \; s=1,2,\dots,k$$

أي ان شرط انتظام الحركة لقيم معينة لكل من الاحداثيات غير الدورية وسرعات العموم المناظرة للاحداثيات الدورية هو:

أن يتلاشى التفاضل الجزئي لدالة لاجرانج بالنسبة لكل احداثي من الاحداثيات غير الدورية عند التعويض بقيم الاحداثيات غير الدورية وكذلك بقيم سرعات العموم المناظرة للاحداثيات الدورية.

## مسائل محلولة

١- تتحرك نقطة كتلتها m تحت تأثير القوة التي مقدارها $(2m/r^3)$ حيث r هو بعد النقطة المادية عن نقطة ثابتة والموجهة دائما نحو النقطة الثابتة. استخدم الاحداثيات القطبية كاحداثيات عموم واذا كان من بين هذه الاحداثيات احداثيات دورية فاوجد دالة راوث للنقطة المادية ثم استخدم دالة راوث لتعيين احداثيات العموم اذا علم ان النقطة المادية بدأت حركتها بحيث كان

$$\text{at } t=0 \Longrightarrow r=2 \;,\; \dot{r}=\sqrt{3/2} \;,\; \dot{\theta}=\tfrac{1}{2}$$

القوة المؤثرة على النقطة المادية هي

$$\underline{F}=-(2m/r^3)\hat{r}$$

وحيث ان هذه القوة هي قوة مركزية فان النقطة المادية تتحرك في مستوى (حركة مستوية).

باختيار الاحداثيات $(r,\theta)$ كاحداثيات عموم فان

طاقة حركة النقطة المادية T هي:

$$T=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$