كلية التربية
قسم الرياضيات - كلية العلوم

محاضرة رقم 8
المادة: نظرية الاحتمالات
توزيع ذات الحدين السالب- باسكال

الفرقة: الثانية
الشعبة: الرياضيات
التاريخ : 2020-4-4

انظر كتاب مقدمة في نظرية الاحتمالات من صفحة 199 الى صفحة 206

توزيع ذات الحدين السالب – باسكال: التعريف، الدالة المعرفة تمثل دالة كتلة احتمالية، المتوسط والتباين والدالة المولدة للعزوم الخام والمركزية ومعامل الالتواء والتفرطح +

نظرية (1). (العلاقة التكرارية لتوزيع ذات الحدين السالب – باسكال)

إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين السالب – باسكال:

$$b^*(x;k,p)=\begin{cases}\binom{x-1}{x-k}p^k(1-p)^{x-k}, & x=k,k+1,\ldots\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

فان العلاقة التكرارية الآتية تتحقق :

$$b^*(x;k+1,p)=\frac{(x-k)\,p}{k\,q}b^*(x;k,p).$$

الاثبات:

$$\frac{b^*(x;k+1,p)}{b^*(x;k,p)}=\frac{\binom{x-1}{k}p^{k+1}q^{x-k+1}}{\binom{x-1}{k-1}p^kq^{x-k}}=\frac{\frac{(x-1)!}{k!(x-k+1)!}}{\frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{x-k}{k}\left(\frac{p}{q}\right)$$

من ذلك نحصل على النتيجة المطلوبة.

أ.د. محمد احمد انور الشهاوى

نظرية (2). (العلاقة بين دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذات الحدين السالب – باسكال وتوزيع ذات الحدين): إذا كان X متغير عشوائي يخضع لتوزيع باسكال:

$$b^*(x;k,p)=\begin{cases}\binom{x-1}{x-k}p^k(1-p)^{x-k} & ,x=k,k+1,\ldots\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

أثبت صحة العلاقة التالية: $.b^*(x;k,p)=\frac{k}{x}b(k;x,p),\ k=x,x-1,x-2,\ldots,1,0$

الإثبات : من تعريف دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع باسكال يكون الطرف الأيسر

$$b^*(x;k,p)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}=\frac{(x-1)!}{(k-1)!(x-k)!}p^k(1-p)^{x-k}$$

$$=\frac{k}{x}\left[\frac{x!}{\mathrm{k}!(\mathrm{x}-\mathrm{k})!}p^x(1-p)^{x-k}\right]=\frac{k}{x}\left[\binom{x}{k}p^k(1-p)^{x-k}\right],x=k,k+1,\ldots$$

$$=\frac{k}{x}\left[\binom{x}{k}p^k(1-p)^{x-k}\right],x=k,k+1,\ldots,$$

من ذلك نحصل على النتيجة المطلوبة.

مثـــال (1): إذا كان احتمال إصابة طفل تعرض لمرض معدي بنفس المرض يساوي 0.4 فإذا تعرض 10 أطفال لذلك المرض المعدي. فما هو احتمال إصابة 3 منهم بالمرض؟

الحـــل : نفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات (عدد الأطفال المعرضون للمرض) للحصول على k إصابة فيخضع X لتوزيع باسكال، حيث عدد المحاولات $x=10$ وعدد الإصابات المطلوبة $k=3$ واحتمال الإصابة $p=0.4$، أي أن:

$$b^*(x;k,p)=\binom{x-1}{x-k}p^k(1-p)^{x-k},x=k,k+1,\ldots$$

$$\therefore b^*(x;k,p)=\binom{9}{2}(0.4)^3(0.6)^7=0.0645.$$

باستخدمنا العلاقة بين توزيع باسكال و توزيع ذات الحدين حيث $x=10,\ k=3,$

$p=0.4$ نجد أن: $b^*(x;k,p)=\frac{k}{x}b(k;x,p),\ \ k=x,x-1,x-2,...,1,0$

$$=\frac{k}{x}\binom{x}{k}p^k(1-p)^{x-k}=\frac{3}{10}\binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^7=\frac{3}{10}(0.215)=0.0645\ .$$

<u>نظرية (3) (تقريب توزيع ذات الحدين السالب بتوزيع بواسون للاحتمالات)</u>

توزيع بواسون هو نهاية توزيع ذات الحدين السالب $b^*(y+k;k,p)$ عندما $\frac{1-p}{p}\to 0$ و $k\to\infty$ بحيث أن $\frac{k(1-p)}{p}\to\lambda$ أي أن:

$$\lim_{\substack{\frac{1-p}{p}\to 0\\ k\to\infty\\ \frac{k(1-p)}{p}\to\lambda}} b^*(y+k;k,p)=\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!},\quad y=0,1,...$$

الإثبات : نفرض أن Y متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذات الحدين السالب أي أن :

$$p_Y(y)=b^*(y+k;k,p)=\binom{y+k-1}{y}p^k(1-p)^y,\ \ y=0,1,2,...$$

$$=\frac{(y+k-1)!}{(k-1)!\,y!}p^k(1-p)^y=\frac{(y+k-1)(y+k-2)...k}{y!}(1+t)^{-k}\left(\frac{t}{1+t}\right)^y.$$

وذلك بفرض أن : $\frac{1-p}{p}=t \leftarrow p=\frac{1}{1+t}$ و $1-p=\frac{t}{1+t}$ و $kt=\lambda$ ، نلاحظ أن

عدد الحدود في بسط الحد الأول يساوي y . $\therefore$ بأخذ k مشترك من كل حد في البسط

$$\therefore \lim_{\substack{t\to 0\\ k\to\infty\\ kt\to\lambda}} P_Y\left(y\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{k^y}{y!}\left[\left(1+\frac{y-1}{k}\right)\left(1+\frac{y-2}{k}\right)\ldots 1\right]\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+k}\right)^{y}$$

$$=\frac{1}{y!}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k}\lim_{k\to\infty}k^y\left(\frac{\lambda}{\lambda+k}\right)^{y}=\frac{1}{y!}e^{-\lambda}\lim_{k\to\infty}k^y\left(1+\frac{k}{\lambda}\right)^{-y}$$

$$=\frac{1}{y!}e^{-\lambda}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{\lambda}\right)^{-y}=\frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!},\quad y=0,1,2,\ldots$$

وهي دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع بواسون بالبارامتر λ .

<u>الحالة الخاصة</u> $k=1$

عند وضع $k=1$ فى <u>توزيع ذات الحدين السالب –باسكال</u>، نحصل على **التوزيع الهندسي** لمتغير عشوائي X يمثل عدد المحاولات اللازمة حتى ظهوراول نجاح باحتمال p لنجاح المحاولة في كل مرة، لتصبح دالة الكتلة الاحتمالية:

$$P_X\left(x\right)=b^*\left(x;1,p\right)=\begin{cases}p\left(1-p\right)^{x-1}, & x=1,2,\ldots\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

هنا العدد x يمثل إجمالي عدد مرات الفشل مضافاً إليهم حالة النجاح الأولى.

❖ للحصول على خصائص واحصاءات **التوزيع الهندسى** استخدم التعويض $k=1$ فى <u>توزيع ذات الحدين السالب –باسكال</u>، من صفحة 199 الى صفحة 206 فى **<u>كتاب مقدمة في نظرية الاحتمالات</u>**، راجع ما حصلت عليه مع (من صفحة 193 الى صفحة 198).

❖ هناك خاصية مهمة خاصة بالتوزيع الهندسى وهى

خاصية فقد الذاكرة (Forget fullness property) :

يقال أن المتغير العشوائى X يخضع للتوزيع الهندسي إذا وفقط إذا تحققت العلاقة التالية:

(i) لأي عددين صحيحين موجبين s,t $\Pr\left(X > s+t \middle| X > s\right) = \Pr\left(X > t\right)$

الإثبات : نفرض أن X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الهندسي :

$$P_X\left(x\right) = \Pr\left(X = x\right) = p\left(1-p\right)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

$$\Pr\left(X > x\right) = \sum_{y=x+1}^{\infty} P_X\left(y\right) = p\sum_{y=x+1}^{\infty}\left(1-p\right)^{y-1} = p\left[\left(1-p\right)^{x} + \left(1-p\right)^{x+1} + \ldots\right]$$

$$= p\left(1-p\right)^{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-p\right)^{k} = p\left(1-p\right)^{x}\frac{1}{1-\left(1-p\right)} = \left(1-p\right)^{x}.$$

ويكون الطرف الأيسر في (i) "من تعريف الاحتمال الشرطي" هو

$$\Pr\left(X > s+t \mid X > s\right) = \frac{\Pr\left(X > s+t, X > s\right)}{\Pr\left(X > s\right)} = \frac{\Pr\left(X > s+t\right)}{\Pr\left(X > s\right)} = \frac{\left(1-p\right)^{s+t}}{\left(1-p\right)^{s}}$$

$$= \left(1-p\right)^{t} = \Pr\left(X > t\right) = \text{الطرف الأيمن}$$

العكس: نفرض أن X متغير عشوائي من النوع المتقطع وأن العلاقة (i) متحققة ونريد أن نثبت أن X يخضع للتوزيع الهندسي بالبارامتر $\Pr\left(X = 1\right) = p$ اى ان $\Pr\left(X > 1\right) = 1-p$.

عندما $s=1$ نجد أن : $$\Pr\left(X>2\mid X>1\right)=\frac{\Pr\left(X>2\right)}{\Pr\left(X>1\right)}=\Pr\left(X>1\right)$$

أو $$\Pr\left(X>2\right)=\left(\Pr\left(X>1\right)\right)^{2}=\left(1-p\right)^{2}$$

عندما $s=2$ نجد أن : $$\Pr\left(X>3\mid X>2\right)=\frac{\Pr\left(X>3\right)}{\Pr\left(X>2\right)}=\Pr\left(X>1\right)$$

أو $$\Pr\left(X>3\right)=\Pr\left(X>1\right)\Pr\left(X>2\right)=\left(1-p\right)^{3}$$

وبالاستمرار نحصل في النهاية على : $$\Pr\left(X>x\right)=\left(1-p\right)^{x}$$

ومنها نحصل على دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X على صورة التوزيع الهندسي:

$$P_X\left(x\right)=\Pr\left(X=x\right)=p\left(1-p\right)^{x-1},\quad x=1,2,\ldots$$

ملاحظة : $$P_X\left(x\right)=\Pr\left(X>x-1\right)-\Pr\left(X>x\right)=\left(1-p\right)^{x-1}-\left(1-p\right)^{x}$$
$$=\left(1-p\right)^{x-1}\left(1-\left(1-p\right)\right)=p\left(1-p\right)^{x-1}.$$

خاصية فقد الذاكرة هي خاصية هامة لا يشارك التوزيع الهندسي فيها أي توزيع آخر (باستثناء التوزيع الأسى في حالة التوزيعات المتصلة الذي له خاصية مشابهة) وهي تعني أنه إذا لم يحدث أول نجاح في المحاولات الأولى التي عددها s فإن احتمال عدم حدوثه خلال المحاولات التي عددها t التالية هو نفسه الاحتمال بعدم حدوث أو نجاح خلال المحاولات التي عددها t الأولى.