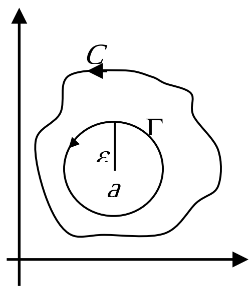
صيغ تكامل كوشي:

نظرية (١):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الحد C لمنطقة ما بسيطة الترابط R وبداخله، برهن صيغة تكامل كوشي.

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$



البرهان:

الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلية على المنحنى C وداخله ما عدا عند النقطة $z=a$ (أنظر شكل ٥-١)

من نظرية (٢) يكون لدينا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \qquad (1)$$

حيث يمكن أن نختار دائرة ما Γ نصف قطرها ε ومركزها النقطة a وبالتالي معادلة Γ هي:

$$|z-a|=\varepsilon$$

أو

$$z-a=\varepsilon e^{i\theta}$$

حيث $0\le\theta\le 2\pi$

بالتعويض بالمقدار $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$، $dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$

فإن التكامل في الطرف الأيمن للمعادلة (1) يصبح

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta$$

من معادلة (1) يكون لدينا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz=i\int_0^{2\pi} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (2)$$

بأخذ النهايات للمعادلة (2) مع الأخذ في الاعتبار أن $f(z)$ متصلة فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \lim_{\varepsilon \to 0} i \int_0^{2\pi} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right) d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(a+\varepsilon e^{i\theta}\right) d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a)$$

وبالتالي

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

كما هو المطلوب.

نظرية (٢):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الحد C لمنطقة ما بسيطة الترابط R وداخلة. برهن أن

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

البرهان:

من نظرية (١) إذا كانت $a + h, a$ واقعتين داخل R فإن

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a}\right\} f(z) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

النتيجة تلي بأخذ النهايات عندما $h \to 0$ إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يقترب من الصفر. ولإثبات ذلك نستخدم الحقيقة أنه إذا كانت Γ هي دائرة نصف قطرها ε ومركزها a وتقع داخل R تماماً (أنظر شكل (٢-٥)) فإن:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

باختيار h بحيث تكون قيمتها المطلقة صغيرة بدرجة أن $a + h$ تقع داخل Γ، $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$ فإننا نرى من حقيقة أن Γ هي أن

$$|z-a-h| \geq |z-a|-|h| > \varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |z-a|=\varepsilon$$

وأيضاً بما أن $f(z)$ تحليلية داخل R فإنه يمكن إيجاد عدد موجب M بحيث أن $|f(z)|<M$ وبما أن طول Γ هو $2\pi\varepsilon$ فإن

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}\right| \leq \frac{|h|M(2\pi\varepsilon)}{2\pi\frac{\varepsilon}{2}.\varepsilon^2}=\frac{2|h|M}{\varepsilon^2}.$$

ويلي ذلك أن الطرف الأيسر يؤول للصفر عندما $h \to 0$. ومن الملاحظ أن النتيجة مكافئة إلى

$$\frac{d}{da}f(a)=\frac{d}{da}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-a)}dz\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

وهي تعميم للتكاملات الكونتورية الخاصة بقاعدة ليبنز للمناطق تحت علامة التكامل.

نظرية (٣):

برهن تحت شروط نظرية (٢) أن:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

البرهان:

الحالتين حيث $n=0, 1$ ينتجان من نظرية ١، ٢ على الترتيب بشرط أن نعرف $f^{0}(a)=f(a)$.

ولبرهان النظرية في حالة $n=2$ نستخدم نظرية ٢ حيث $a+h, a$ يقعان في R فإن

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}\right\}f(z)dz$$
$$=\frac{2}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz+\oint_{C}\frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^2}f(z)dz$$

النتيجة تلي بأخذ النهاية عندما $h \to 0$ إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يقترب من الصفر. البرهان مماثل لبرهان نظرية ٢، وباستخدام حقيقة أن التكامل حول C يساوي التكامل حول Γ يكون لدينا

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^2} f(z)dz\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\frac{M(2\pi\varepsilon)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\varepsilon^2}$$

$$\le \frac{4|h|M}{\varepsilon^4}$$

بما أن M موجود بحيث أن:

$$\left|\{3(z-a)-2h\}f(z)\right| < M$$

بالمثل يمكن أن نبرهن النظرية في حالة $n = 3, 4, \ldots$ النتيجة مكافئة إلى

$$\frac{d^n}{da^n}f(a) = \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

نظرية (٤):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في R فإن $f'(z), f''(z), \ldots$ تحليلية في R.

مثال:

أوجد قيمة:

(أ) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$

(ب) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{(z+1)^4}dz$ حيث C هو الدائرة $|z| = 3$.

الحل:

(أ) بما أن

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

فإن

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-2)}dz - \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)}dz$$

ومن صفة تكامل كوشي حيث $a = 1, a = 2$ على الترتيب فإن:

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-2)}dz = 2\pi i\left\{\sin \pi (2)^2 + \cos \pi (2)^2\right\} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)} dz = 2\pi i \{\sin \pi + \cos \pi\} = -2\pi i$$

بما أن $z = 2, z = 1$ يكونان داخل المنحنى C،

تكون تحليلية داخل C، فإن التكامل المطلوب له القيمة:

$$2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

(ب) ليكن $f(z) = e^{2z}$، $a = -1$ في صيغة تكامل كوشي، فإن:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \qquad (1)$$

إذا كانت $n = 3$ فإن

$$f^{(3)}(-1) = 8e^{-2}, \qquad f^{(3)}(z) = 8e^{2z}$$

إذن (1) يصبح

$$f^{(3)}(-1) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z+1)^4} dz$$

ومنها نرى أن التكامل المطلوب له القيمة $\frac{8\pi i e^{-2}}{3}$.

<u>نظرية (٥): (موريرا)</u>

إذا كانت الدالة $f(z)$ متصلة في منطقة بسيطة الترابط R وإذا كان $\oint_C f(z) dz = 0$ حول منحنى بسيط مقفل C في R فإن $f(z)$ تكون تحليلية في R.

<u>البرهان:</u>

إذا كان $\oint_C f(z) dz = 0$ لا يعتمد على المسار C فإن $F(z) = \int_a^z f(z) dz$ لا يعتمد على المسار الذي يصل z, a طالما أن هذا المسار يقع في R.

وعلى ذلك فمن نظرية (٢) (نتائج نظرية كوشي) يلي أن $F(z)$ تحليلية في R، $F'(z) = f(z)$ وتكون $F'(z)$ تحليلية إذا كانت $F(z)$ كذلك.

إذن $f(z)$ تحليلية في R.

<u>نظرية (٦): (متباينة كوشي)</u>

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على الدائرة التي نصف قطرها r ومركزها عند $z = a$ وداخل هذه الدائرة فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.n!}{r^n}, \qquad n = 0,1,2,...$$

و M ثابتاً ما بحيث $|f(z)| < M$ على الدائرة.

البرهان:

يكون لدينا من صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad n = 0,1,2,...$$

وحيث $|z-a| = r$ على C وطول المنحنى هو $2\pi r$ يكون لدينا

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}.2\pi r = \frac{M.n!}{r^n}.$$

نظرية (٧): (نظرية ليوفيل)

إذا كان لجميع قيم z في المستوى المركب الشامل:

(i) $f(z)$ تحليلية. (ii) $f(z)$ محدودة

فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابت.

البرهان:

بوضع $n = 1$ في متباينة كوشي وإحلال z بدلاً من a فإن:

$$|f'(z)| = \frac{M}{r}$$

وبجعل $n \to \infty$ نستنتج أن $|f'(z)| = 0$ وبالتالي $f'(z) = 0$

$\therefore$ $f(z)$ تكون ثابت.

نظرية (٨): (النظرية الأساسية في الجبر)

كل معادلة كثيرة الحدود

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

حيث $a_n \ne 0,\ n \ge 1$ لها جذر واحد على الأقل.

البرهان:

إذا كانت $P(z)$ ليس لها جذر فإن $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ تكون تحليلية لجميع قيم z. وأيضاً $|f(z)| = \dfrac{1}{|P(z)|}$ تكون محدودة (وهي في الحقيقة تقترب من الصفر) كلما $|z| \to \infty$

وعلى ذلك ينتج من نظرية ليوقيل أن $f(z)$ وبالتالي $P(z)$ يجب أن تكون ثابتاً، أي أنه يوجد تناقض ويستنتج أن $P(z)=0$ يجب أن يكون لها على الأقل جذر واحد. وكما يقال في بعض الأحيان أن $P(z)$ لها على الأقل صفراً واحداً.

مثال:

برهن أن كل معادلة كثير الحدود $P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ حيث الدرجة $a_n \neq 0, n \geq 1$ لها بالضبط n من الجذور.

الحل:

من النظرية الأساسية في الجبر، $P(z)$ لها على الأقل جذر واحد. نرمز لهذا الجذر بالرمز α أي أن $P(\alpha)=0$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} P(z)-P(\alpha) &= a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n-\left(a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n\right) \\ &= a_1(z-\alpha)+z_2\left(z^2-\alpha^2\right)+\ldots+a_n\left(z^n-\alpha^n\right) \\ &= (z-\alpha)\phi(z) \end{aligned}$$

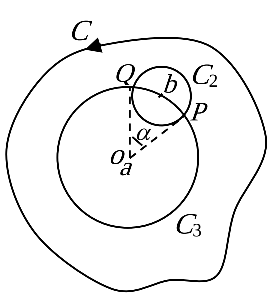
حيث $\phi(z)$ هي كثيرة حدود من درجة $n-1$.

نطبق النظرية الأساسية في الجبر مرة أخرى، نرى أن $\phi(z)$ لها على الأقل صفر واحد والذي يرمز له بالرمز β (والذي يمكن أن يكون مساوياً للجذر α) وبالتالي

$$P(z)=(z-\alpha)(z-\beta)\phi(z)$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة نرى أن $P(z)$ لها بالضبط n من الجذور.

نظرية (٩): (نظرية جاوس للقيمة المتوسطة)



لتكن $f(z)$ تحليلية على الدائرة C التي مركزها a وداخلها. فإن متوسط قيم $f(z)$ هو $f(a)$.

البرهان:

من صيغة تكامل كوشي:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)}dz \qquad (1)$$

إذا كان نصف قطر C هو r فإن معادلة C هي $|z-a|=r$ أو $z=a+re^{i\theta}$ وبالتالي تصبح المعادلة (1)

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(a+re^{i\theta}\right)ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

نظرية (١٠): (نظرية أكبر مقياس)

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على منحنى بسيط مقفل C وداخله، فإن القيمة العظمى لـ $|f(z)|$ توجد على C، إلا إذا كانت $f(z)$ ثابت.

نظرية (١١): (نظرية أصغر مقياس)

لتكن $f(z)$ تحليلية على المنحنى البسيط المقفل C في داخله وكانت $f(z)\neq 0$ داخل المنحنى C فإن $|f(z)|$ تأخذ قيمتها الصغرى على المنحنى C.

البرهان:

$f(z)$ تحليلية على المنحنى C وداخله و $f(z)\neq 0$ داخل C لذا فإن $\frac{1}{|f(z)|}$ تحليلية داخل C ومن نظرية أكبر مقياس ينتج أن $\frac{1}{|f(z)|}$ لا يمكن أن تأخذ قيمتها العظمى داخل C وبالتالي $|f(z)|$ لا يمكن أن تأخذ قيمتها الصغرى داخل C وبالتالي $|f(z)|$ لها قيمة صغرى، فإن هذه القيمة الصغرى يجب أن تصل إليها على المنحنى C.

مثال:

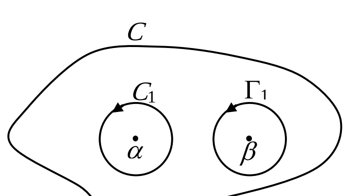
أعطي مثالاً لتثبت أنه إذا كانت $f(z)$ تحليلية على منحنى بسيط مقفل C وداخله $f(z)=0$ عند نقطة ما داخل C فليس من الضروري أن تأخذ $|f(z)|$ قيمتها الصغرى على C.

الحل:

لتكن $f(z)=z$, $|z|\leq 1$ بحيث أن C هي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها هو الوحدة. وعلى ذلك فإن $f(z)=0$ عندما $z=0$.

إذا كانت $z=re^{i\theta}$ فإن $|f(z)|=r$ ومن الواضح أن القيمة الصغرى $|f(z)|$ لا توجد على C ولكن توجد داخل المنحنى C حيث $r=0$ عندما $z=0$.

نظرية (١٢): (نظرية المدلول)



لتكن $f\,(z)$ تحليلية على منحنى بسيط مغلق C وداخله مما عدا النقطة $z=\alpha$ من الرتبة p (مكرر) داخل C. افرض أيضاً أن الدالة $f\,(z)$ لها صفر واحد $z=\beta$ من الرتبة n (مكرر) داخل C وليس لها أصفار على C فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n-p\ .$$

<u>البرهان:</u>

ليكن Γ_1, C_1 دائرتين غير متداخلتين تقعان داخل C بحيث أن $z=\beta, z=\alpha$ على الترتيب فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \qquad (1)$$

بما أن $f\,(z)$ لها قطب من رتبة p عند $z=\alpha$ فإن

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p} \qquad (2)$$

حيث $F(z)$ تحليلية وتختلف عن الصفر على المنحنى C_1 وداخله. بأخذ اللوغاريتمات في (2) والتفاضل، نجد أن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha} \qquad (3)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz - \frac{p}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{dz}{z-\alpha} \\ &= 0-p=-p\partial \end{aligned} \qquad (4)$$

بما أن $f\,(z)$ لها صفر من رتبة n عند $z=\beta$ فإن:

$$f(z) = (z-p)^n G(z) \qquad (5)$$

حيث $G(z)$ تحليلية وتختلف عن الصفر على المنحنى Γ_1 وداخله، وبأخذ اللوغاريتمات والتفاضل، نجد أن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta} + \frac{G'(z)}{G(z)} \qquad (6)$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{n}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{dz}{z-\beta}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{G'(z)}{G(z)}dz$$
$$= n+0 = n \qquad (7)$$

وعلى ذلك نحصل على النتيجة المطلوبة من (1), (4), (7)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = n-p$$

نظرية (١٣): (نظرية روشيه)

إذا كانت $g(z), f(z)$ تحليليتين على منحنى مقفل C وداخله وإذا كانت $|g(z)|<|f(z)|$ على C فإن $f(z), f(z)+g(z)$ يكون لهما نفس عدد الأصفار داخل C.

البرهان:

ليكن $F(z)=\dfrac{g(z)}{f(z)}$ بحيث $g(z)=f(z)F(z)$ أو باختصار $g=fF$. إذا كان N_2, N_1 هما عدد الأصفار داخل C للدالتين $f, f+g$ على الترتيب وحيث أن الدالتين ليس لهما أقطاب داخل C، يستنتج أن:

$$N_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'+g'}{f+g}dz, \qquad N_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'}{f}dz$$

وبالتالي:

$$N_1-N_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'+f'F+fF'}{f+fF}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'}{f}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'(1+F)+fF'}{f(1+F)}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'}{f}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\left(\frac{f'}{f}+\frac{F'}{1+F}\right)dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f'}{f}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{F'}{1+F}dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}F'\left(1-F+F^2-\ldots\right)dz = 0$$

حيث أن $|F|<1$ على C ومنها ينتج أن المتسلسلة منتظمة التقارب على C وبالتكامل حداً حداً ينتج أن القيمة صفر، وبالتالي $N_1=N_2$.

مثال:

برهن أن كل كثيرة حدود من درجة n لها بالضبط n من الأصفار (النظرية الأساسية في

الجبر).

<u>**الحل:**</u>

نفرض أن كثيرة الحدود هي

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0$$

نختار

$$f(z) = a_n z^n, \qquad g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$$

إذا كانت C هي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $r > 1$، يكون لدينا:

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| &= \frac{\left|a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}\right|}{\left|a_n z^n\right|} \\ &\leq \frac{|a_0| + |a_1| r + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{|a_n| r^n} \\ &\leq \frac{|a_0| r^{n-1} + |a_1| r^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1}}{|a_n| r^n} \\ &\leq \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}\end{aligned}$$

على C. باختيار r كبيرة بدرجة كافية، يمكن أن نجعل $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ أي $|g| < |f|$. على ذلك يلي من نظرية روشيه أن كثيرة الحدود المعطاه أي $f + g$ لها نفس عدد أصفار $f(z) = a_n z^n$. ولكن حيث أن للدالة الأخيرة n من الأصفار جميعها عند $z = 0$ فإن $f + g$ يكون لها أيضاً n من الأصفار.

<u>**مثال:**</u>

برهن أن جميع جذور المعادلة $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ تقع بين الدائرتين $|z| = 1$, $|z| = 2$.

<u>**الحل:**</u>

اعتبر الدائرة $C_1 : |z| = 1$

ليكن $g(z) = z^7 - 5z^3, \quad f(z) = 12$

على منحنى C_1. يكون:

$$|g(z)| = \left|z^7 - 5z^3\right| \leq \left|z^7\right| - 5\left|z^3\right| \leq 6 < 12 = |f(z)|$$

إذن من نظرية روشيه $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ لها نفس عدد الأصفار داخل $|z| = 1$ مثل $f(z) = 12$.

أي لا يوجد أصفار داخل C_1.

اعتبر الدائرة $C_2: |z| = 2$

ليكن $g(z) = 12 - 5z^3, \qquad f(z) = z^7$

على C_2 يكون

$$|g(z)| \le |12| + |5z^3| \le 60 < z^7 = |f(z)|$$

إذن من نظرية روشيه $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ لها نفس عدد الأصفار داخل $|z| = 2$ مثل $f(z) = z^7$ أي أن كل الأصفار تدخل C_2 وبالتالي فإن كل الجذور تقع داخل C_2 وخارج C_1.