الباب الرابع
قوانين كبلر

قوانين كبلر:

* القانون الأول:

يدور كل كوكب حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس في إحدى بؤرتيه.

* القانون الثاني:

يمسح الخط الواصل بين الكوكب والشمس مساحات متساوية في أزمنة متساوية. أي أنه السرعة المساحية تكون ثابتة، وبالتالي تكون سرعة الكوكب أكبر عند اقترابها من الشمس وأبطأ عند بعدها عن الشمس.

* القانون الثالث:

مربع الزمن الدوري المداري للكوكب يتناسب مع مكعب نصف المحور الأكبر للمدار.

قانون الجذب العام:

استخدم نيوتن قوانين كبلر لاستنتاج القوة المتبادلة بين الكوكب والشمس كما يلي:

من القانون الأول:

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

بالتفاضل بالنسبة للزمن:

$$\dot{r} = \frac{l e \dot{\theta} \sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{e}{l}(r^2\dot{\theta})\sin\theta$$

من القانون الثاني:

$$r^2\dot{\theta} = \text{Const.} = h$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\therefore \dot{r} = \frac{eh}{l}\sin\theta,$$

$$\ddot{r} = \frac{eh}{l}\dot{\theta}\cos\theta = \frac{eh^2}{lr^2}\cos\theta$$

مركبة القوة في الاتجاه المستعرض:

$$F_\theta = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

∴ القوة المؤثرة هي قوة مركزية فقط وتساوي:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$= m\left(\frac{eh^2}{lr^2}\cos\theta - \frac{h^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{mh^2}{r^2}\left(\frac{e\cos\theta}{l} - \frac{1+e\cos\theta}{l}\right)$$

$$= -\frac{mh^2}{lr^2} = -\mu\frac{m}{r^2}$$

حيث $\mu = \frac{h^2}{l}$ ثابت

أي أن: تؤثر الشمس على الكوكب بقوة مركزية جاذبة تتناسب طرديًا مع كتلة الكوكب وعكسيًا مع مربع البعد بين الكوكب والشمس.

ثم تعميم هذا القانون لدراسة القوة المتبادلة بين أي جسمين كتلتاهما M ، m بوضع $\mu = \gamma M$ حيث $\frac{h^2}{l}$

$\gamma = 6.67 \times 10^{-11}\ N m^2/kg^2$ ثابت الجذب العام.

فتصبح القوة المتبادلة بين جسمين:

$$F = \gamma\frac{mM}{r^2}$$

وهو ما يعرف بقانون الجذب العام أو قانون التربيع

سرعة الكوكب عند أي موضع:

من القانون الأول لكبلر:

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

بوضع $u = \frac{1}{r}$

$$\therefore u = \frac{1}{l} + \frac{e\cos\theta}{l}$$

$$\therefore e\cos\theta = lu - 1,$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{l}$$

قانون السرعة:

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$$= h^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{l^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{2e\cos\theta}{l^2} + \frac{e^2\cos^2\theta}{l^2}\right]$$

$$= h^2\left(\frac{e^2}{l^2} + \frac{1}{l^2} + \frac{2e\cos\theta}{l^2}\right)$$

$$= \frac{h^2}{l^2}\left(e^2 + 1 + 2lu - 2\right)$$

$$= \frac{h^2}{l}\left(\frac{e^2-1}{l} + \frac{2}{r}\right)$$

من خواص القطع الناقص:

$$l = a(1-e^2) \Rightarrow v^2 = \frac{h^2}{l}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

الطاقة الكلية للكوكب:

طاقة الحركة:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{h^2 m}{l} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

طاقة الوضع:

$$U = - \int_{\infty}^{r} \underline{F}_r \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_{\infty}^{r} \frac{h^2 m}{l r^2} dr = - \frac{h^2 m}{l r}$$

∴ الطاقة الكلية:

$$E = T + U$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h^2 m}{l} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{h^2 m}{l r}$$

$$= \frac{h^2 m}{l r} - \frac{h^2 m}{2 l a} - \frac{h^2 m}{l r}$$

$$= - \frac{h^2 m}{2 l a} .$$