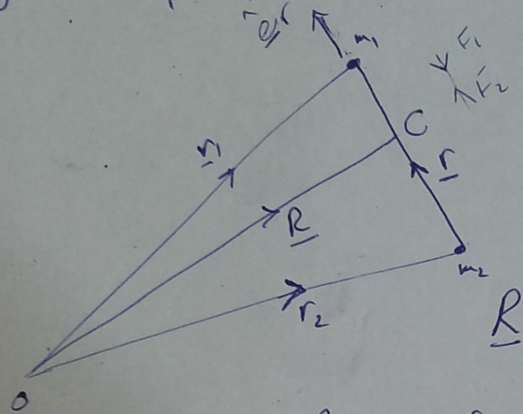
(5) حركة جسيمين حرين تحت تأثير القوى المركزية المتبادلة بينهما

نفرض جسيمين كتلتاهما m_1, m_2 ومتجه موضعيهما $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ بالنسبة لنقطة أصل ثابتة O.



متجه موضع m_1 بالنسبة لـ m_2

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$$

متجه موضع مركز الكتلة C:

$$\underline{R} = \frac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore (m_1 + m_2)\underline{R} = m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2 \qquad (\underline{r}_2 = \underline{r}_1 - \underline{r})$$

$$\therefore (m_1 + m_2)\underline{R} = m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_1 - m_2\underline{r}$$

$$\therefore \underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\underline{r} \ , \ \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\underline{r} \quad \text{---} (1)$$

إذا كانت القوى المتبادلة بين الجسيمين $F\hat{\underline{e}}_r$ فإن معادلات الحركة:

$$m_1\frac{d^2\underline{r}_1}{dt^2} = -F\hat{\underline{e}}_r \quad \text{---} (2)$$

$$m_2\frac{d^2\underline{r}_2}{dt^2} = F\hat{\underline{e}}_r \quad \text{---} (3)$$

بجمع المعادلتين (3) + (2)

$$\therefore m_1\frac{d^2\underline{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\underline{r}_2}{dt^2} = 0$$

بالتعويض من (1)

$$\therefore m_1\frac{d^2\underline{R}}{dt^2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} + m_2\frac{d^2\underline{R}}{dt^2} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = 0$$

$$\therefore (m_1 + m_2)\frac{d^2\underline{R}}{dt^2} = 0$$

معادلة حركة مركز الكتلة

وبعض ان

$$\frac{d\underline{R}}{dt} = const.$$

أي ان مركز كتلة المجموعة يتحرك بسرعة منتظمة.

بضرب المعادلة (2) في m_2 والمعادلة (3) في m_1 والطرح

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \underline{r}_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 \underline{r}_2}{dt^2} = - (m_1+m_2) F \hat{\underline{e}}_r$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = -(m_1+m_2) F \hat{\underline{e}}_r$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = -F \hat{\underline{e}}_r$$

بوضع $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ الكتلة المخفضة للمجموعة.

وهي معادلة حركة جسم واحد كتلته ثابتة وهي μ تحت تأثير قوى مركزية ثابتة وتبعد مسافة r عن الجسم.

أي ان حركة جسمين تحت تأثير القوى المركزية المتبادلة بينهما تكافئ حركة جسم واحد كتلته μ تحت تأثير قوى مركزية مركزها ثابت ويبعد مسافة r عن الجسم.

⑥ إثبات قوانين كبلر:

* القانون الأول:

نفرض أن M كتلة الشمس، m كتلة الكوكب وهما جسمان مترابطان حركتهما يكافئ حركة جسم كتلته μ تحت تأثير قوة مركزية مركزها ثابت وفي هذه الحالة فإن الكتلة المخفضة:

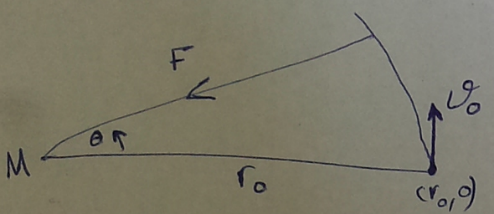
$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{\frac{m}{M}+1} \simeq m \qquad (M \gg m)$$

~~وتصبح معادلة حركة الكوكب بالشكل~~

فتكون القوة المؤثرة لوحدة الكتل: $F = \frac{\gamma M}{r^2} = \gamma M u^2$

ونفرض أنه عند موضع ما كانت

$\theta = 0, \ r = r_0, \ v = v_0$ في الاتجاه المتعامد



$$(\dot r, r\dot\theta) = \left(-h\frac{du}{d\theta}, hu\right)$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = \left(\frac{du}{dr}\right)_{\theta=0}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{\theta=0}$$

المعادلة التفاضلية للمسار

$$h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = F$$

$$\therefore h^2\cancel{u^2}\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] = \gamma M \cancel{u^2}$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\gamma M}{h^2} - u$$

$$\therefore \frac{d^2}{d\theta^2}\left(u - \frac{\gamma M}{h^2}\right) = -\left(u - \frac{\gamma M}{h^2}\right)$$

$$\therefore u - \frac{\gamma M}{h^2} = A\cos\theta + B\sin\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = -A\sin\theta + B\cos\theta$$

at $\theta = 0$ $\quad u = \frac{1}{r_0}$ $\quad \frac{du}{d\theta} = 0$

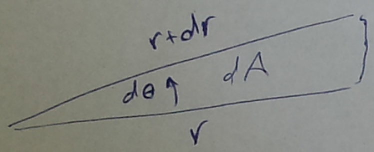
$$\therefore A = \frac{1}{r_0} - \frac{\gamma M}{h^2} \quad , \quad B = 0$$

$$\therefore u = \frac{\gamma M}{h^2}\left[1 + \left(\frac{h^2}{\gamma M r_0} - 1\right)\cos\theta\right]$$

$$\therefore r = \frac{\frac{h^2}{\gamma M}}{1 + \left(\frac{h^2}{\gamma M r_0} - 1\right)\cos\theta} = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$

وهي تمثل معادلة قطع ناقص.

* القانون الثاني:



خلال فترة زمنية صغيرة dt فإن الخط الواصل بين الكوكب والشمس يمسح المساحة

$$dA = \frac{1}{2} r(r+dr)\sin d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

∴ السرعة المساحية:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2} \ (\text{const.})$$

∴ السرعة المساحية ثابتة.

* القانون الثالث :

من القانون الاول لكبلر : $b^2 = la = \frac{h^2 a}{\gamma M}$ ---- (1)

من القانون الثاني لكبلر :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \quad \text{----} \quad (2)$$

نفرض أن الكوكب يقطع المسار كاملاً في زمن قدره P .

بتكامل العبارة (2)

$$\int_0^P \left(\frac{dA}{dt}\right) dt = \frac{h}{2}\int_0^P dt$$

$$\pi a b = \frac{hP}{2}$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2}$$ من (1)

$$= \frac{4\pi^2 h^2 a^3}{h^2 \gamma M} = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M}$$

اي مربع الزمن الدوري يتناسب مع مكعب نصف طول المحور الأكبر للمسار