* مثال (1): احسب عجلة الجاذبية الأرضية بدلالة كتلة الأرض ونصف قطرها.

الحل

نفرض أن كتلة الأرض M_e ونصف قطرها R_e. ونفرض أن جسم كتلته m يسقط سقوطاً حراً في مجال الجاذبية الأرضية فإنه عند سطح الأرض تكون القوة المؤثرة على الجسم:

$$F = mg$$

ومن قانون الجذب العام:

$$F = \frac{\gamma m M_e}{R_e^2}$$

$$\therefore g = \frac{\gamma M_e}{R_e^2}.$$

* مثال (2): أوجد أكبر وأقل بعد لكوكب المريخ عن الشمس إذا كان طول نصف المحور الأكبر لمداره $1.5237\,AU$ واختلافه المركزي $e = 0.0934$.

$(1\,AU = 1.5\times10^{11}\,m)$

الحل

من القانون الأول لكبلر:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

يكون بعد الكوكب عن الشمس أكبر ما يمكن عندما
$\theta = 0$

$$r_{max} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e)$$

$$= 1.666\ AU \simeq 2.5 \times 10^{11}\ m$$

ويكون بعد الكوكب عن الشمس أقل ما يمكن عندما
$\theta = \pi$

$$r_{min} = a(1-e) = 1.3814\ AU$$
$$\simeq 2.07 \times 10^{11}\ m$$

* مثال (3): باستخدام قوانين كبلر، استنتج مركبات السرعة لكوكب.

الحل

من قانون كبلر الأول:

$$r = \frac{l}{1 - e\cos\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{-l e \dot{\theta} \sin\theta}{(1 - e\cos\theta)^2}$$

$$= -\frac{e}{l} r^2 \dot{\theta} \sin\theta = -\frac{eh}{l} \sin\theta$$

$$h = r^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore r\dot{\theta} = \frac{h(1-e\cos\theta)}{l}.$$

* مثال (٤): أوجد السرعة المدارية للكوكب عند أبعد موضع له عن الشمس والسرعة المدارية للكوكب عند أقرب موضع له من الشمس، واحسب النسبة بينهما.

الحل

أبعد موضع للكوكب عن الشمس $\theta = 0$.

أقرب موضع للكوكب من الشمس $\theta = \pi$.

في كلا الحالتين تنعدم السرعة في الاتجاه المركزي $v_r = \dot{r} = 0$.

أما السرعة في الاتجاه المستعرض:

$$v_1 = \frac{h}{l}(1-e)$$ عند أبعد موضع

$$v_2 = \frac{h}{l}(1+e)$$ عند أقرب موضع

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1-e}{1+e}.$$

* مثال (5):

أوجد أكبر وأقل بعد لمذنب هالي عن الشمس، إذا علمت أن زمنه الدوري 76 سنة، وانفكاكه المركزي 0.967.

الحل

من القانون الثالث لكبلر:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$$

$$\therefore a = \sqrt[3]{\frac{\gamma M P^2}{4\pi^2}}$$

$$= 2.68 \times 10^{12} \ m$$

أكبر بعد: $r_{max} = a(1+e) = 5.27 \times 10^{12} \ m$

أقل بعد: $r_{min} = a(1-e) = 8.84 \times 10^{10} \ m$

6 إذا كانت r_p هي أقرب مسافة للكوكب من الشمس و r_a هي أبعد مسافة للكوكب عن الشمس. أوجد a, e, b.

الحل

$r_a = a(1+e)$ --- (1) $\quad r_p = a(1-e)$ --- (2)

بالجمع:

$$\therefore r_a + r_p = 2a \Rightarrow a = \frac{r_a + r_p}{2}.$$

بالقسمة:

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow r_a - e r_a = r_p + e r_p$$

$$\therefore e(r_a + r_b) = r_a - r_p \Rightarrow e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}.$$

$$b^2 = a^2(1-e^2) = \frac{(r_a+r_p)^2}{4}\left(1 - \left(\frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}\right)^2\right)$$

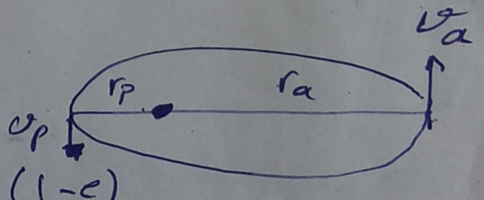
$$= \frac{\cancel{(r_a+r_p)^2}}{4}\left(\frac{r_a^2 + 2r_a r_p + r_p^2 - r_a^2 + 2r_a r_p - r_p^2}{\cancel{(r_a+r_p)^2}}\right)$$

$$= r_a r_p \Rightarrow b = \sqrt{r_a r_p}$$

7 إذا كانت r_p هي أقرب مسافة للكوكب من الشمس وكانت سرعته عندئذ v_p ، r_a هي أبعد مسافة للكوكب عن الشمس وسرعته عندئذ v_a فأثبت أن

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}.$$

الحل



$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$v_p = \frac{h}{l}(1+e), \quad v_a = \frac{h}{l}(1-e)$$

$$\therefore \frac{v_p}{v_a} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow \frac{r_a}{r_p} = \frac{v_p}{v_a}$$