الباب الخامس
حركة الأقمار والأقمار الصناعية

تتحرك الأقمار حول الكواكب التابعة لها في مسارات دائرية بأزمنة دورية تتناسب مربعها مع مكعب نصف قطر المسار.

$$P^2 \propto R^3.$$

* مثال (1):
استنتج مركبات السرعة والعجلة لقمر يتحرك في مسار دائري نصف قطره R.

الحل

باستخدام الإحداثيات القطبية، فإن مركبات السرعة:

$$\underline{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}) = (0, R\dot{\theta})$$

مركبات العجلة:

$$\underline{f} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}))$$

$$= (-R\dot{\theta}^2, 0) = (-\frac{v^2}{R}, 0)$$

∴ العجلة $= \frac{v^2}{R}$ متجهة نحو مركز المسار.

* مثال (2):

أثبت أن القوة التي يؤثر بها كوكب المشتري على قمر كتلته m يبعد مسافة R عن مركز المشتري تتناسب مع $\frac{m}{R^2}$ وتتجه نحو مركز المشتري.

الحل

يتحرك القمر بسرعة v على محيط دائرة نصف قطرها R ومركزها هو مركز المشتري. فتكون عجلته $\frac{v^2}{R}$ متجهة نحو مركز المشتري.

من قانون نيوتن الثاني فإن القوة المؤثرة على القمر

$$F = \frac{mv^2}{R} \quad \dots (1)$$

وهي قوة جذب تتجه نحو مركز المشتري.

الزمن الدوري للقمر:

$$P = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{P}$$

بالتعويض في (1)

$$\therefore F = \frac{4\pi^2 mR}{P^2}$$

$$P^2 \propto R^3$$

$$P^2 = kR^3$$

$$\therefore F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{R^2}$$

أي أن القوة التي يؤثر بها كوكب المشتري على قمر كتلته m وبعد مسافة R عن مركز المشتري تتناسب مع $\frac{m}{R^2}$ وتتجه نحو مركز المشتري.

* مثال (3):

يدور أحد أقمار كوكب المشتري دورة كاملة حول الكوكب في 1.77 days ونصف طول محوره الأكبر $4.22 \times 10^8 m$. أوجد كتلة كوكب المشتري.

الحل

من القانون الثالث لكبلر:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M}$$

$$\therefore M = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma P^2}$$

$$= \frac{4\pi^2 \times (4.22)^3 \times 10^{24}}{6.673 \times 10^{-11} (1.77 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$\simeq 1.9 \times 10^{27} \ kg.$$

* مثال (٧): يتحرك قمر ٍ صناعي دائري نصف قطره $3.84 \times 10^8 m$ حول أحد الكواكب، وكان الزمن الدوري له 27.3 d احسب سرعته وعجلته.

الحل

السرعة:

$$v = \frac{2\pi R}{P} = 1022.9 \ m/sec.$$

$$f = \frac{v^2}{R} = 0.0027 \ m/sec^2$$

متجهة إلى مركز الكوكب

الأقمار الصناعية:

نفرض قمر صناعي كتلته M_s يتحرك في مدار دائري على بعد مسافة h عن سطح الأرض

(i) تعيين سرعة القمر الصناعي:

يتأثر القمر الصناعي بقوتين:

* قوة جذب الأرض للقمر:

$$F_g = \gamma \frac{M_s M_e}{R^2}$$

حيث:

M_e: كتلة الأرض

R: بعد القمر الصناعي عن مركز الأرض

* قوة طاردة مركزية:

$$F_c = \frac{M_s v^2}{R}$$

لكي يسير القمر الصناعي في مسار دائري فإن:

$$F_c = F_g$$

$$\therefore v^2 = \frac{\gamma M_e}{R}$$

ولكن $\gamma M_e = g R_e^2$

حيث R_e : نصف قطر الأرض.

$$\therefore v^2 = \frac{g R_e^2}{R} = \frac{g R_e^2}{R_e + h}.$$

(ii) الزمن الدوري لقمر صناعي:

$$P = \frac{2\pi R}{v}$$

$$= 2\pi (R_e + h) \sqrt{\frac{R_e + h}{g R_e^2}}.$$

(iii) القمر الصناعي المزامن للأرض:

هو قمر صناعي تكون حركته المدارية مزامنة لدوران الأرض حول نفسها. ولكي يتحقق ذلك يجب

أن يكون الزمن الدوري للقمر الصناعي مساوياً لزمن دورة الأرض حول نفسها (يوم واحد).

* مثال (1):

أوجد السرعة والزمن الدوري لقمر صناعي يتحرك في مدار دائري على بعد 1500 km من سطح الأرض.
($R_e = 6.37 \times 10^6 m$)

الحل

$$h = 1500\ km = 1.5 \times 10^6\ m$$

سرعة القمر الصناعي:

$$v = \sqrt{\frac{g R_e^2}{R_e + h}}$$

$$= 7108.29 \quad m/sec.$$

الزمن الدوري:

$$P = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi (R_e + h)}{v}$$

$$= 6956.48 \quad sec.$$

* مثال (4) :

احسب نصف قطر مدار قمر صناعي مزامن للأرض.

$(R_e = 6.37 \times 10^6 m)$

الحل

سرعة القمر الصناعي :

$$v = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R}}$$

لكي يكون القمر الصناعي مزامناً للأرض: $P = 1\,d$

$$\therefore P = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{gR_e^2}} = 86400$$

$$\therefore 4\pi^2 \frac{R^3}{gR_e^2} = (86400)^2$$

$$\therefore R^3 = \frac{9.8\,(6.37\times10^6)^2 (86400)^2}{4\pi^2}$$

$$= 7.52 \times 10^{22}$$

$$\therefore R = 4.22 \times 10^7\ m$$

* مثال (3):

احسب كتلة الأرض، إذا علمت أن قمر صناعي مزامن للأرض يمكنه الحركة في مدار دائري نصف قطره $4.2 \times 10^7 m$.

الحل

سرعة القمر:

$$v = \frac{2\pi R}{P} \quad , \quad (P = 1d = 86400\ sec)$$

$$= 3054.33 \quad m/sec.$$

ولكن:

$$v^2 = \frac{\gamma M_e}{R}$$

$$\therefore M_e = \frac{v^2 R}{\gamma} = 5.87 \times 10^{24}\ kg.$$