أنواع المجالات الإجهادية

١- مجال عمودي كروي:

يقال أن المجال الإجهادي عند نقطة ما داخل وسط قابل للتشكل مجال عمودي كروي إذا تلاشت جميع المركبات المماسية لممتد الإجهاد عند هذه النقطة وتساوت مركباته العمودية

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma \neq 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

ممتد الإجهاد يمكن كتابته على الصورة

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\,\sigma$$

ويكون السطح الرئيسي للإجهاد سطح كروي

$$\sigma x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2 = \pm c^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \pm \frac{c^2}{\sigma}$$

أي ثلاث محاور متعامدة عند هذه النقطة تعتبر محاور أساسية وتكون مركبات الإجهادات الأساسية متساوية وتساوي σ

③ مجال شد بسيط (ضغط بسيط)

يقال ان المجال الاجهادي عند نقطه ما داخل الوسط قابل للتشكل انه شد بسيط (ضغط بسيط) اذا تلاشت جميع مركبات الاجهاد عند النقطه ماعدا مركبه واحده عموديه على سبيل المثال $T = \sigma_{11}$ حسب T موجبه ام سالبه

وبالتالي مركبات ممتد الاجهاد

$$\sigma_{11} = T \neq 0 \quad , \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{ij} = T\,\delta_{i1}\,\delta_{j1}$$

يكون احد المحاور الاساسيه هو محور x والمحوران الاخران الاساسيان اي محورين متعامدين على محور x ويكون السطح التربيعي للاجهاد بالصورة

$$x^2 = \pm \frac{c^2}{T}$$

٣- مجال اجهاد القص

يسمى المجال الاجهادى عند نقطة ما بداخل وسط قابل للتشكل بانه ا

اجهاد القص اذا تلاشت جميع مركبات الاجهاد ماعدا احد مركباته المماسية

ولتكن $\sigma_{12} = S$ أى أن

$$\sigma_{12} = S \neq 0 \quad و \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$

اى على الصورة.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = S(\delta_{i1}\delta_{j2} + \delta_{i2}\delta_{j2})$$

ويكون سطح كوشى للاجهاد على الصورة:

$$xy = \pm \frac{c^2}{2S}$$

عبارة عن سطح منشورى محوره يوازى محور z ومقطعه العمودى على محور z عبارة عن قطع زائد قائم.

٤. المجال الاجهادي المستوي:

اذا تلاشت مركبات الاجهاد في اتجاه ما وليكن محور z أي أن

$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ قيل ان المجال الاجهادي عند النقطة مجالا اجهاديا

مستويا أي في المستوي xy بحيث لا تعتمد المركبات الاخرى للاجهاد على z

أي أن

$\sigma_{11}(x,y)$, $\sigma_{12}(x,y)$, $\sigma_{22}(x,y)$

وعلى ذلك مركبات الاجهاد P_n تأخذ الصورة:

$$P_{n_1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2$$

$$P_{n_2} = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2$$

$$P_{n_3} = 0$$

اي ان متجه الاجهاد P_n المؤثر على مساحة ما داخل هذا الوسط يكون موازي

المستوي oxy .

٤ـ الممتد الكروي وممتد التشوه (الانبعاج) للاجهاد :

لدراسة الاجسام المرنة نجزئ ممتد الاجهاد الى جزئيين :

الاول : يعبر عن شد أو ضغط متساوي من جميع الاتجاهات وهو المسئول عن التغير الناشئ عن حجم الجسم .

الثاني : يعبر عن التغير في شكل الجسم دون تغير حجمه لذلك فإن ممتد الاجهاد σ_{ij} يمكن وصفه على الصورة :

$$\sigma_{ij} = \sigma\,\delta_{ij} + S_{ij}$$

حيث

$$\sigma\,\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \rightarrow$$ الممتد الكروي يعبر عن مجال عمودي

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma \end{bmatrix} \rightarrow$$ ممتد الانبعاج أو التشوه .

الباب الثالث:

نظرية الانفعال

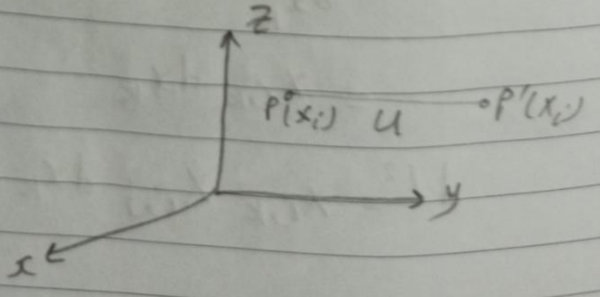
مركبات الازاحة:

ازاحات: لدينا جسم قابل للتشكل فإن جميع النقاط تعانى من ازاحات داخليه تحت تأثير الشد والتى للجسم اذا اعتبرنا نقطه ما P فى الجسم متجه موضعها هو $\underline{r} = (x, y, z)$ فإنه بعد التشكل تزاح هذه النقطه الى الموضع P' الذى له متجه الموضع $\underline{R} = (X, Y, Z)$ الخط الواصل من P الى P' يعين متجه الازاحه نتيجه التشكل ويرمز له بالرمز $\underline{u}$ ومركباته $\underline{u} = (u, v, w)$ وحيث ان الازاحه تختلف من موضع لآخر فى الجسم فإن

$$u = u(x, y, z) = u(x_i)$$

$$v = v(x, y, z) = v(x_i)$$

$$w = w(x, y, z) = w(x_i)$$



الانفعال:

نعتبر نقطتين متجاورتين $P(x_i)$ و $Q(x_i+dx_i)$ في الجسم قبل التشكل والمسافة بينهما dl وبعد التشكل يأخذا الموضعين $P'(X_i)$ و $Q'(X_i+dX_i)$ بالنسبة لنفس المحاور والمسافة بينهما dL وواضح ان:

$$dl^2 = dx_i\, dx_i$$

$$dL^2 = dX_i\, dX_i$$

وحيث أن الازاحة من P الى P' هي $\underline{u}$ فإن الازاحة من Q الى Q' تكون $\underline{u}+d\underline{u}$ حيث:

$$d\underline{u} = d\underline{L} - d\underline{l}$$

وحيث أن $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3)$ فإن:

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_i}{\partial x_3} dx_3$$

$$= \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k$$

$$= X_{i,k}\, dx_k$$

$$dL^2 = X_{i,k}\, X_{i,j}\, dx_k\, dx_j$$

$$\therefore\ dL^2 - d\ell^2 = X_{i,k} X_{i,j}\, dx_k\, dx_j - dx_i\, dx_i$$

08.00

09.00

$$= X_{i,k} X_{i,j}\, dx_k\, dx_j - \delta_{ij}\delta_{ik}\, dx_k\, dx_j$$

10.00

$$= \left(X_{i,k} X_{i,j} - \delta_{ij}\delta_{ik} \right) dx_k\, dx_j$$

11.00

12.00

$$= \left(X_{i,k} X_{i,j} - \delta_{jk} \right) dx_k\, dx_j \quad (1)$$

C_{ij} ← ممتد التشوه الانفعالى لجرين

01.00

لكن $X_i = x_i + u_i$ بالتالى ينتج أن :

02.00

$$dL^2 - d\ell^2 = \left[(x_i + u_i)_{,k} (x_i + u_i)_{,j} - \delta_{jk} \right] dx_k\, dx_j$$

03.00

$$= \left[(x_{i,k} + u_{i,k})(x_{i,j} + u_{i,j}) - \delta_{jk} \right] dx_k\, dx_j$$

04.00

05.00

$$= \left[(\delta_{ik} + u_{i,k})(\delta_{ij} + u_{i,j}) - \delta_{jk} \right] dx_k\, dx_j$$

06.00

$$= \left[\cancel{\delta_{jk}} + \delta_{ik} u_{i,j} + \delta_{ij} u_{i,k} + u_{i,k} u_{i,j} - \cancel{\delta_{jk}} \right] dx_k\, dx_j$$

07.00

$$= \left[u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j} u_{i,k} \right] dx_k\, dx_j$$

08.00

بفرض أن المشتقات ~~صغير~~ الازاحه صغيره اى يمكن اهمال مربعاتها وحاصل ضربها

09.00

$$dL^2 - d\ell^2 = \left[u_{j,k} + u_{k,j} \right] dx_j\, dx_k$$

$$= 2\epsilon_{jk}\, dx_j\, dx_k \quad \text{—} \quad (2)$$

$$\therefore \epsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(u_{j,k} + u_{k,j}\right)$$

من (1) ، (2) $2\epsilon_{jk} = X_{i,j}\, X_{i,k} - \delta_{jk}$ ← ممتد لاجرانج للانفعال

وبصفة عامة $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$ ← علاقة كوشي

ϵ_{ij} مركبات ممتد الانفعال والممتد متماثل $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ وبالتالي

مركباته ستة فقط وتكون على الصورة:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

هذه المركبات تتبع في تحويلها للقانون

$$\epsilon'_{ij} = \alpha_{ik}\, \alpha_{jl}\, \epsilon_{kl}$$

المعنى الطبيعي والهندسي لمتد الانفعال

نعتبر اولا المركبات ϵ_{ii} والتي تسمى مركبات الانفعال الطولى.

نفرض جسم مرن موازى لمحور x_2 طوله قبل التشكل يساوى dl

وبعد التشكل dL أي أن

$$dx_1 = 0 \,,\; dx_3 = 0 \,,\; dx_2 = dl$$

$$\therefore dL^2 - dl^2 = 2\epsilon_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

$$= 2\epsilon_{22}\, dx_2^2$$

$$= 2\epsilon_{22}\, dl^2$$

$$\epsilon_{22} = \frac{dL^2 - dl^2}{2\, dl^2}$$

$$= \frac{(dL - dl)(dL + dl)}{2\, dl^2}$$

$$\simeq \frac{dL - dl}{dl}$$

الاستطالة النسبية في الاتجاه الموازى لمحور x_2

$\therefore \epsilon_{ii}$ تساوي التغير النسبي لأطوال عناصر منتهية في الصغر كانت قبل الانتقال موازية للمحاور الاحداثيات .

لإيجاد المعنى الطبيعي للكميات ϵ_{ij} والتي $i \neq j$ والتي تسمى مركبات الانتقال المقص . نفرض سترجتين طوليتين موازيتين للمحور x_1^1 و x_3^3 طوليهما قبل الانتقال ℓ_1^1 , ℓ_3^3 وبعد الانتقال تدور السترجتان بالزاوية B_1 , B_2 ويصبح طوليهما L_1^1 , L_3^3 على الترتيب لذلك فان التغير الكلي من الزاوية القائمة بين السترجتين يساوي B حيث $B = B_1 + B_2$

$$dx_1 = d\ell_1 \quad , \quad dx_3 = d\ell_3 \quad , \quad dx_2 = 0$$

$$dL^i = d\ell^i + u_i$$

$$dL_i^1 = \frac{\partial L_i^1}{\partial x_j} dx_j$$

$$= (\ell_i^1 + u_i)_{,j} \, dx_j$$

$$= (\ell_{i,j}^1 + u_{i,j}) \, dx_j$$

$$= (\delta_{ij} + u_{i,j}) \, dx_j$$

$$dl_i^3 = \frac{\partial l_i^3}{\partial x_k} dx_k$$

$$= (l_i^3 + u_i)_{,k}\, dx_k$$

$$= (\delta_{ik} + u_{i,k})\, dx_k$$

$$dL^1 \cdot dL^3 = (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k})\, dx_j\, dx_k$$

$$= (\delta_{jk} + \delta_{ij} u_{i,k} + \delta_{ik} u_{i,j} + u_{i,j} u_{i,k})\, dx_j\, dx_k$$

$$= (\delta_{jk} + u_{j,k} + u_{k,j} + \cancel{u_{i,j} u_{i,k}})\, dx_j\, dx_k$$

$j = 1,\ k = 3$

$$= (u_{1,3} + u_{3,1})\, dL^1 dL^3$$

لكن

$$dL^1 \cdot dL^3 = dL^1 dL^3 \cos\theta$$

$$= dL^1 dL^3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$= dL^1 dL^3 \sin\beta$$

$$\simeq dL^1 dL^3 \beta \qquad = \beta\, dL^1 dL^2$$

$$\therefore \beta = (u_{1,3} + u_{3,1}) = 2\,\epsilon_{13}$$

اى ان مركبه الانفعال ϵ_{13} تساوى نصف التغير فى زاويه كانت قائمه

بين عنصرين كانا قبل التشكل موازيين للمحورين المتناظرين

مركبات الانفعال الرئيسيه :

مركبات الانفعال الرئيسيه يمكن ايجادها من المعادلة :

$$|\epsilon_{ij} - \epsilon_n \delta_{ij}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{11}-\epsilon_n & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22}-\epsilon_n & \epsilon_{32} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33}-\epsilon_n \end{vmatrix} = 0$$

من هذه المعادله نحصل على المعادله التكعيبيه

$$\epsilon_n^3 - k_1 \epsilon_n^2 + k_2 \epsilon_n - k_3 = 0$$

حيث

$$k_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{ii}$$

$$k_2 = \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{11}\epsilon_{33} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{23}^2$$

$$k_3 = \det(\epsilon_{ij})$$

k_1, k_2, k_3 هى كميات لاتغيريه تحت دوران المحاور

الاتجاهات الرئيسية المناظرة تتعين كل هذا المعادلات

$$(\epsilon_{ij} - \epsilon_n \delta_{ij})\, n_j = 0$$

نحصل على ثلاث اتجاهات متعامدة n_j

التغير الحجمي والشكل للأجسام المرنة

نفرض عنصر صغير من الجسم المرن على شكل متوازي مستطيلات اطواله الابتدائية قبل التشكل δz و δy و δx وموازية للمحاور الرئيسية تحت الانفعال حجم هذا العنصر

قبل التشكل يكون

$$\delta V = \delta x\, \delta y\, \delta z$$

وبعد التشكل يصبح الحجم $\delta V'$ حيث

$$\delta V' = \delta x(1+\epsilon_{11})\, \delta y\,(1+\epsilon_{22})\, \delta z\,(1+\epsilon_{33})$$

$$= (1+\epsilon_{11})(1+\epsilon_{22})(1+\epsilon_{33})\, \delta V$$

$$= (1+\epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33} + O(\epsilon^2))\, \delta V$$

$$\delta V' = (1+\epsilon_{ii})\, \delta V \Rightarrow \delta V' - \delta V = \epsilon_{ii}\, \delta V$$

اذن التغير النسبي في الحجم (ومعامل الامتداد "الحجمي على الصورة

$$\theta = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \epsilon_{ii} = k_1$$

أي ان معامل الامتداد الحجمي يساوي مجموع الانفعالات الرئيسية وهو

كمية لا تغيرية .

$\theta = \sum_{i=1}^{3} u_{i,i}$

لدراسة التغير في شكل العنصر متسبب الانفعال المعبر عن ممتد الانفعال

بمجموع ممتدين

$$\epsilon_{ij} = \epsilon^{v}_{ij} + \epsilon^{D}_{ij}$$

$$\epsilon^{v}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\theta \end{bmatrix} \rightarrow \text{ممتد الامتداد الانفعالي}$$

$$\epsilon^{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - \frac{1}{3}\theta & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} - \frac{1}{3}\theta & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} - \frac{1}{3}\theta \end{bmatrix} \rightarrow \text{ممتد التشوه الانفعالي}$$