شروط التناسق الانفعالي :

لتعيين مركبات الازاحه بدلاله مركبات تمتد الانفعال يكونه لدينا ٦ معادلات
في ٣ مجاهيل ولكي نحصل على حل متصل ووحيد لمركبات الازاحه فانه
يجب ان تتوافر شروط تسمى شروط التناسق الانفعالي.

$\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ و $\epsilon_{ji} = u_{j,i} + u_{i,j}$
تفاضل وسيتي

$$\epsilon_{ij,kl} = u_{i,jkl} + u_{j,ikl}$$

$$\epsilon_{jk,ii} = u_{j,kii} + u_{k,jii}$$

بالجمع

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{jk,ii} = u_{i,jkl} + u_{j,kii} + u_{k,jii}$$

$$= (u_{i,j} + u_{j,i})_{kl}$$

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{jk,ii} = 2\,\epsilon_{ij,kl}$$

نحصل على ٣ معادلات مستقله هي

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2\,\epsilon_{12,12}$$

$$\epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} = 2\,\epsilon_{23,23}$$

$$\epsilon_{11,33} + \epsilon_{33,11} = 2\,\epsilon_{13,13}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})$$

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} + u_{k,j})$$

$$\therefore \epsilon_{ij,ik} = \frac{1}{2}(u_{i,jik} + u_{j,iik})$$

$$\epsilon_{ik,ij} = \frac{1}{2}(u_{i,kij} + u_{k,iij})$$

$$\epsilon_{jk,ii} = \frac{1}{2}(u_{j,kii} + u_{k,jii})$$

$$\epsilon_{ii,jk} = u_{i,ijk}$$

$$\therefore \epsilon_{ij,ik} + \epsilon_{ik,ij} - \epsilon_{jk,ii} = \frac{1}{2}\left[u_{i,jik} + u_{j,iik} + u_{i,kij} + u_{k,iij} - u_{j,kii} - u_{k,jii}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_{i,i} + u_{i,i}\right]_{kj}$$

$$= \frac{1}{2}(2\epsilon_{ii})_{kj}$$

$$= \epsilon_{ii,kj}$$

REDMI NOTE 8 PRO
AI QUAD CAMERA

المعادلات السابقة تؤول الى ثلاث معادلات مستقلة هى :

$$\epsilon_{12,13} + \epsilon_{13,12} - \epsilon_{23,11} = \epsilon_{11,23}$$

$$\epsilon_{23,21} + \epsilon_{21,23} - \epsilon_{31,22} = \epsilon_{22,31}$$

$$\epsilon_{31,32} + \epsilon_{32,31} - \epsilon_{12,33} = \epsilon_{33,12}$$

تقابل متجه الازاحه u_i عيكن كتابته كالصورة :

$$u_{i,j} = \epsilon_{ij} + w_{ij}$$

حيث

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

↓

العنصر الدوراني وهو عكس المماثل $w_{ij} = -w_{ji}$

وكذلك $w_{11} = w_{22} = w_{33} = 0$ اى ان

$$w = \begin{bmatrix} 0 & -w_{12} & -w_{13} \\ w_{12} & 0 & -w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

اذا كانت مركبات حقل الازاحه معطاه بالصوره

$u_1 = A x_2 x_3$ ، $u_2 = A x_3^2$ ، $u_3 = A x_1^2$

حيث A ثابت اوجد :

١- مركبات حد الانفعال والحد الدوراني

٢- مركبات الانفعال الرئيسيه عند النقطه (٥ و ١ و ١)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} = 0 \quad ، \quad \epsilon_{22} = u_{2,2} = 0 \quad و \quad \epsilon_{33} = u_{3,3} = 0$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2}(Ax_3)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}(Ax_2 + 2Ax_1)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}(2Ax_3) = Ax_3$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$$w_{11} = w_{22} = w_{33} = 0$$

$$w_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) = \frac{1}{2} A x_3$$

$$w_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) = \frac{1}{2}(A x_2 - 2A x_1)$$

$$w_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) = \frac{1}{2}(2A x_3) = A x_3$$

$$w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -Ax_3 & -(Ax_2 - 2Ax_1) \\ Ax_3 & 0 & -2Ax_3 \\ Ax_2 - 2Ax_1 & 2Ax_3 & 0 \end{pmatrix}$$

مركبات لانفعال الرئيسيه

$$|\epsilon_{ij} - \epsilon_n \delta_{ij}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\epsilon & \frac{1}{2}Ax_3 & \frac{1}{2}(Ax_2 + 2Ax_1) \\ \frac{1}{2}Ax_3 & -\epsilon & Ax_3 \\ \frac{1}{2}(Ax_2 + 2Ax_1) & Ax_3 & -\epsilon \end{vmatrix} = 0$$

عند النقطه (0و0و1)

$$\begin{vmatrix} -\epsilon & 0 & \frac{3A}{2} \\ 0 & -\epsilon & 0 \\ \frac{3}{2}A & 0 & -\epsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$-\epsilon^3 + \frac{3A}{2} \cdot \frac{3A}{2}\epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon\left(\epsilon^2 - \frac{9A^2}{9}\right) = 0$$

الباب الرابع

العلاقات بين الاجهاد والانفعال

طاقة الجهد للانفعال

نفرض حالتان انفعاليتين مستقاربتان لجسم مرن الاولى تتميز لمتجه الازاحة u ومعدد الانفعال ϵ_{ij} والثانية لمتجه الازاحة $u+\delta u$ ومعدد الانفعال $\epsilon_{ij}+\delta\epsilon_{ij}$ نوجد الشغل المبذول لتشكيل عنصر صغير على شكل متوازي مستطيلات الاطوال $\delta x, \delta y, \delta z$ والموازية لمحاور الاحداثيات x, y, z. نفرض u و σ_{ij} مستويين الى مركز متوازي المستطيلات.

القوى المؤثرة على الوجه الامامي $\delta y\,\delta z$ هي:

$$\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}\frac{\delta x}{2},\ \sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x}\frac{\delta x}{2},\ \sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

و $\delta y\,\delta z$ وباتجاه $\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x}\frac{\partial x}{2}$

مركبات الازاحة للناظرة

$$u_i+\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

القوى المؤثرة على الوجه الخلفي

و $\delta y\,\delta z$ وباتجاه $\sigma_{1i}-\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x}\frac{\partial x}{2}$

REDMI NOTE 8 PRO
AI QUAD CAMERA

المركبات الازاحه المناظره تكون

$$u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\delta x}{2}$$

الشغل المبذول يواسطه هذه القوى

$$\left[\left(\sigma_{1i} + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta\left(u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right) - \left(\sigma_{1i} - \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta\left(u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\right.$$

باهمال حدود الدرجه الثانيه

$$\left[\sigma_{1i}\delta u_i + \sigma_{1i}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right) + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\delta u_i - \sigma_{1i}\delta u_i + \sigma_{1i}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\delta u_i\right]\delta y\,\delta z$$

$$\left[\sigma_{1i}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\delta x\right) + \delta u_i \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x}\delta x\right]\delta y\,\delta z$$

$$\left[\sigma_{1i}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x}\delta u_i\right]\delta x\,\delta y\,\delta z \Rightarrow \left[\sigma_{1i}\delta u_{i+1} + \sigma_{1i+1}\delta u_i\right]\delta$$

بنفس الطريقه يمكنه ايجاد الشغل المبذول بالقوى الاحتياديه الاخرى على الاوجه الاربعه

بالتالى الشغل المبذول على تشكل العنصر يساوى مجموع الشغل الذى تبذله القوى

على الستة اوجه مضافا اليها الشغل الذى تبذله القوى الحجميه F_i اى ان

$$\delta W = \{ F_i \delta u_i + \sigma_{ij0} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i0} + \sigma_{ij0} \delta u_i - \sigma_{ij} \delta u_{i02} + \sigma_{ij3} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i03} \} \delta V$$

$$\delta W = \{ (F_i + \sigma_{ij,j0}) \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \} \delta V$$

صفر معادلة الاتزان

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta u_{i,j} \delta V$$

لكن

$$u_{i,j} = \epsilon_{ij} + w_{ij}$$

$$\delta W = [\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta w_{ij}] \delta V$$

صفر

حاصل ضرب كمية في عكس المماثل = صفر

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \delta V$$

$$= \delta U \delta V$$

$$\delta U = \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (1)$$

طاقة الجهد لوحدة حجوم الجسم المرن

لما ان طاقة الجهد لوحده الحجم تعتمد على الحالة الانفعالية للجسم اي على مركبات الحالة ϵ_{ij} فان

$$U = U(\epsilon_{ij})$$

$$\therefore \delta U = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} \quad (2)$$

عبارة (1) في (2)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \rightarrow (*)$$

مركبات الاجهاد تعتبر كمقابل لطاقة الجهد لوحده الحجم بالنسبة لمركبات حالة الانفعال

العلاقات (*) تمثل علاقات خربي وعددها 15 علاقة لان المعادلات متماثلة وتسمى ايضا بالعلاقات التبادلية.