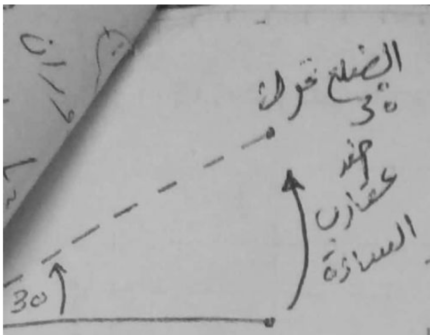
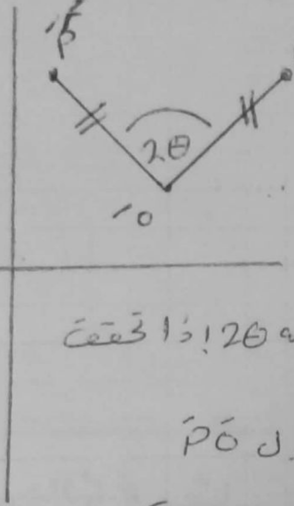


الدورات

* عندما نقصد الدوران ← يعني أنه دوران ضد عقارب الساعة



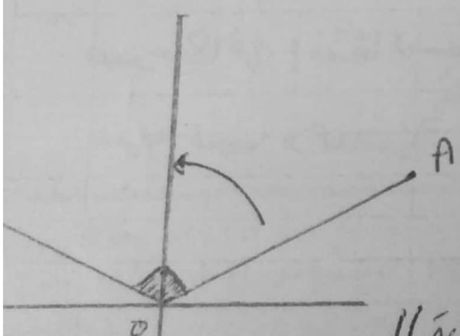
يلزم للدوران نقطة ما . فمثلاً :-
النقطة P تدور حول النقطة O بدوران مقدار زاويته 2θ اذا كان ←

نقول أن P' هي صورة P بدوران قياسه 2θ إذا تحقق الآتي :-

$|\overline{OP'}| = |\overline{OP}|$

طول OP' يساوي طول PO

والزاوية مقاسة ضد عقارب الساعة



∵ النقطة A' صورة النقطة A بدوران حول O قياسه 90°

∴ طول OA = طول OA'

والزاوية $A'\hat{O}A = 90 = 2\theta$ ((ضد اتجاه عقارب الساعة))

الدوران :- لـ نقطة

تعريف: نقول أن النقطة $\acute{P} \in \alpha$ هي صورة للنقطة $P \in \alpha$ بدوران مقياسه 2θ حول النقطة $O \in \alpha$ إذا كان :-

① $|\overline{OP}| = |\overline{O\acute{P}}|$ طول القطعة المستقيمة OP = طول القطعة المستقيمة $O\acute{P}$

② $(P\hat{O}\acute{P}) = 2\theta$ الزاوية $PO\acute{P}$ تساوي 2θ

الأصل — نقطة الدوران — الصورة

تعريف صورة الشكل :-

نقول أن الشكل $\acute{F} \in \alpha$ هو صورة للشكل $F \in \alpha$ بدوران مقياسه 2θ حول النقطة O إذا كان

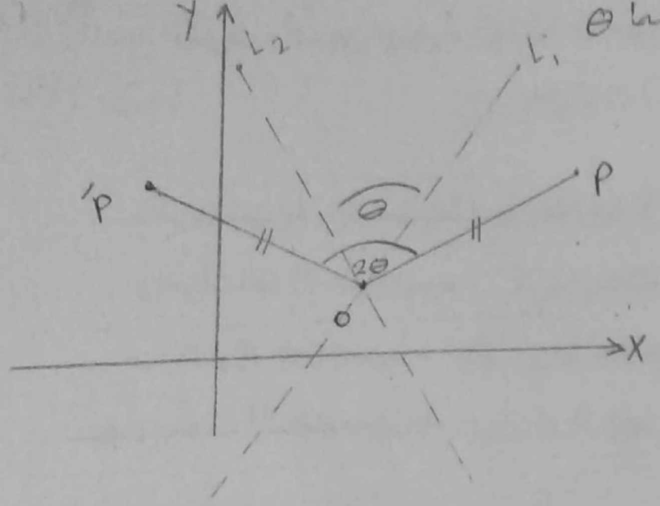
$\acute{F} = \{ \acute{P} \in \alpha :$ $\acute{P}$ صورة للنقطة $P \in F$ بدوران مقياسه 2θ حول $O \}$

كل نقطة $\acute{P}$ من الشكل $\acute{F}$ هي صورة النقطة P من الشكل F

[34]

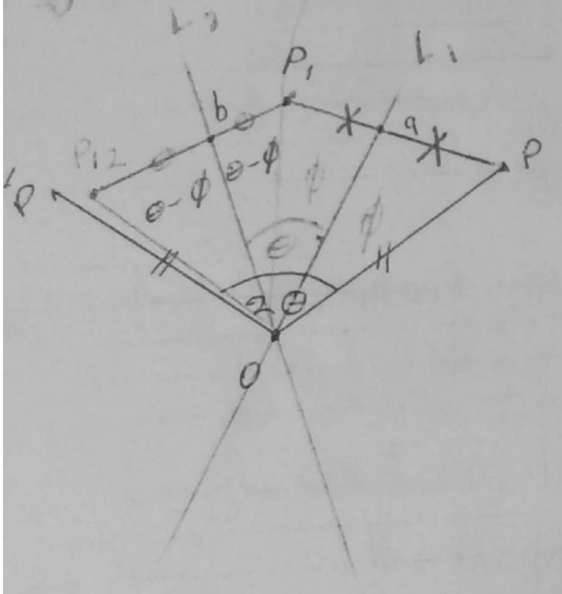
نظرية

دوران مقياسه 2θ حول نقطة o يكافئ محصلة انعكاسين حول مستقيمين L_1, L_2 مارين بالنقطة o والزاوية بينهما θ



البرهان :

شرح شخص :.



نسقط عمود من P على L_1 ونمده على نفس طوله ونسمي صورة P بالانعكاس حول L_1 ← P_1

∴ P_1 صورة النقطة P بالانعكاس حول L_1

وبانعكاس P_1 حول L_2 تكون صورتها بالانعكاس P_{12}

مانريد اثباته ← أن P' هي نفسها النقطة P_{12} .

نعمل P_1O مستقيم .. ونطابق المثلثين $P_1\hat{o}a, P\hat{a}o$

ومنه نستنتج أن : $P_1\hat{o}a = P\hat{o}a$

وأن $|P_1O| = |PO|$

ثم نطابق المثلثين $P'ob, P_1ob$

ومنه نستنتج أن :. $P'\hat{o}b = P_1\hat{o}b$

وأن $P'O = P_1O$

وبحساب الزاوية $P_{12}\hat{o}P$

$$\cancel{\phi} + \cancel{\phi} + \theta - \cancel{\phi} + \theta - \cancel{\phi} = 2\theta$$

نستنتج أن الضلع $P'O = P_{12}O$

∴ P' هي النقطة P_{12}

٢٥

نص البرهان

نفرض P' هي صورة النقطة P بدوران مقياسه 2θ حول o ومن تعريف الدوران ينتج

① $|\overline{oP'}| = |\overline{oP}|$ ② $(P\hat{o}P') = 2\theta$

نفرض ان l_1 , l_2 مستقيمين مارين بالنقطة o وان الزاوية بينهما هي θ

ونفرض ان P_1 هي صورة P بالانعكاس حول l_1

وان P_{12} هي صورة P_1 بالانعكاس حول l_2

ويكون المطلوب اثبات ان P' هي نفسها $\Leftarrow P_{12}$

المثلثات Poa و P_1oa يتطابقان :-

① $|\overline{oP}| = |\overline{oP_1}|$
② $(P\hat{a}o) = (P_1\hat{a}o) = 90°$
③ الضلع $\overline{oa}$ مشترك

وينتج من تطابقهما

$\boxed{1}$ $|\overline{Po}| = |\overline{P_1o}|$
$\boxed{2}$ $(P\hat{o}a) = (P_1\hat{o}a) = \phi$

المثلثات P_1ob و $P_{12}ob$ يتطابقان :-

① $P_1b = P_{12}b$
② $(P_{12}\hat{b}o) = (P_1\hat{b}o) = 90°$
③ الضلع $\overline{ob}$ مشترك

وينتج من تطابقهما

$\boxed{1}$ $|\overline{P_{12}o}| = |\overline{P_1o}|$
$\boxed{2}$ $(P_{12}\hat{o}b) = (P_1\hat{o}b) = \theta - \phi$

من الرسم :-

$(P\hat{o}P_{12}) = \cancel{\phi} + \cancel{\phi} + \theta - \cancel{\phi} + \theta - \cancel{\phi}$

$(P\hat{o}P_{12}) = 2\theta$

ومن ذلك ينتج ان :-

$P_{12}o$ تقع على الضلع oP'

ولكن

$|\overline{P_{12}o}| = |\overline{P_1o}| = |\overline{oP}| = |\overline{oP'}|$

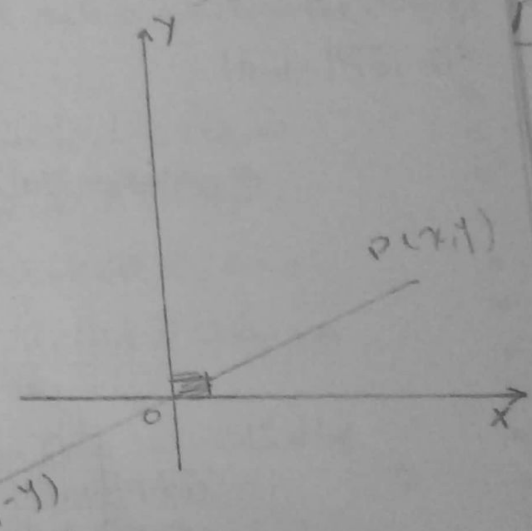
وينتج من ذلك ان P_{12} هي نفسها P'

وهو المطلوب اثباته

دوران مقياسه π $(\pi = 2\theta)$ لنصف دورة :

$\boxed{1}$ حول نقطة الأصل :-

نرمز للدوران بالرمز G



رمز الدوران

مقياس الدوران

النقطة التي ندور حولها

إحداثيات النقطة التي سندور

$$G_{o(0,0)}(\pi)(x,y) = (R_{y=0} \circ R_{x=0})(x,y)$$

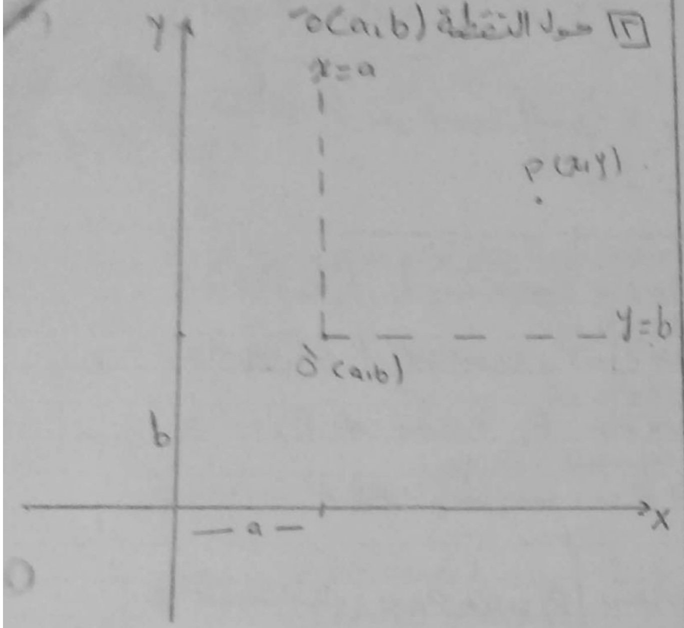
$$= R_{y=0}\left[R_{x=0}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=0}(-x,y)$$

$$= (-x,-y)$$

$$\therefore G_{o}(\pi)(x,y) = (-x,-y)$$

$\boxed{2}$ حول النقطة $\acute{o}(a,b)$



$$G_{\acute{o}}(\pi)(x,y) = (R_{y=b} \circ R_{x=a})(x,y)$$

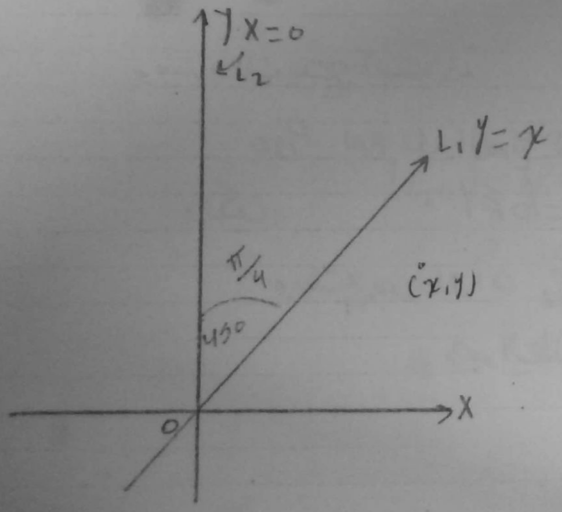
$$= R_{y=b}\left[R_{x=a}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=b}(2a-x,y)$$

$$= (2a-x, 2b-y)$$

$$\therefore G_{\acute{o}}(\pi)(x,y) = (2a-x, 2b-y)$$

ملاحظة :- أي محصلة انعكاسين $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$ لبشرط أن المحورين متعامدين



$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

دوران بقياسه $\frac{\pi}{2}$ $\left(2\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ ربع دورة :.

[1] حول نقطة الأصل.

$$G_0\left(\frac{\pi}{2}\right)(x, y) = \left(\underset{x=0}{R} \circ \underset{y=x}{R}\right)(x, y)$$

$$= \underset{x=0}{R}\left[\underset{y=x}{R}(x, y)\right]$$

$$= \underset{x=0}{R}(y, x) = (-y, x)$$

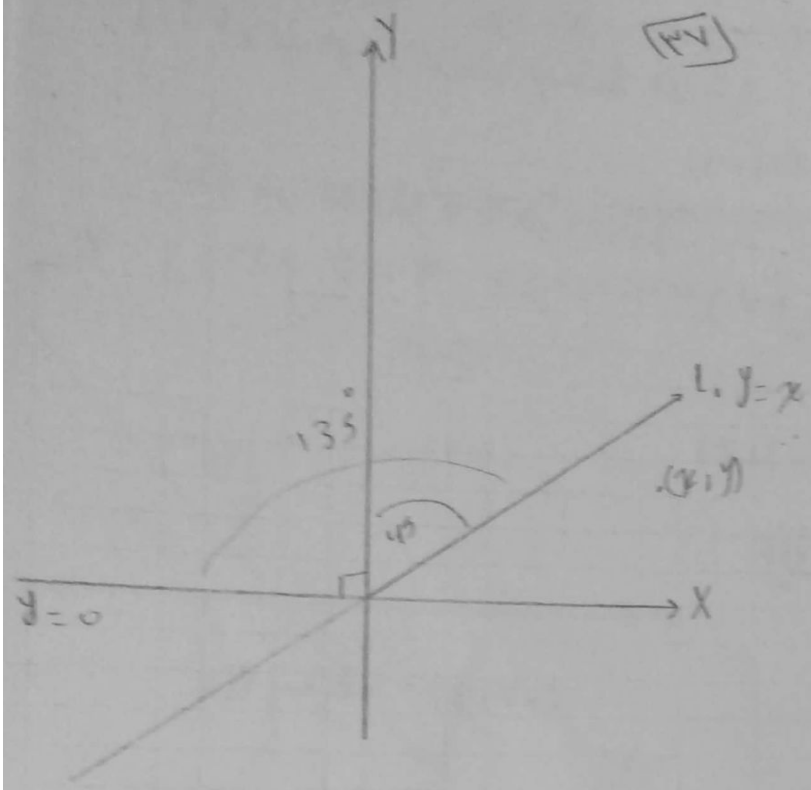
$$G_0\left(\frac{\pi}{2}\right)(x, y) = (-y, x)$$

٣٧

دوران بمقياس $\frac{3\pi}{2}$

$2\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\theta = 135^\circ$

⇐ حول نقطة الأصل :-



$$G_o\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = \left(R_{y=0} \circ R_{y=x}\right)(x,y)$$

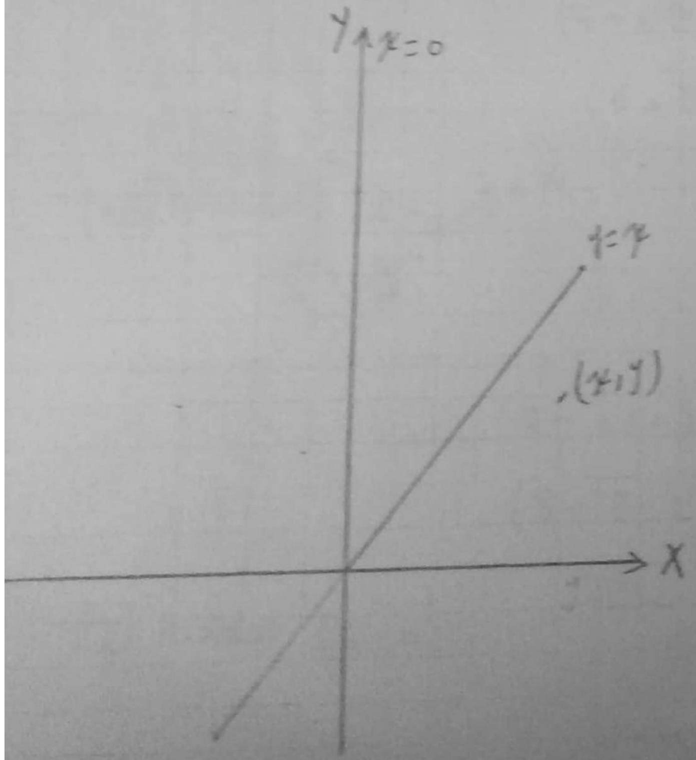
$$= R_{y=0}\left[R_{y=x}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=0}(y,x)$$

$$= (y,-x)$$

$$G_o\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = (y,-x)$$

حل آخر



$$G_o\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = \left(R_{y=x} \circ R_{x=0}\right)(x,y)$$

$$= R_{y=x}\left[R_{x=0}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=x}(-x,y)$$

$$= (y,-x)$$

$$G_o\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = (y,-x)$$

* نفس النتيجة في الحل الأول

جدول الدورانات

$G_O(\pi)(x,y) = (-x,-y)$

$G_{(a,b)}(\pi)(x,y) = (2a-x, 2b-y)$ و $G\left(\frac{\pi}{2}\right)(x,y) = (-y,x)$

تمارين

[١] أوجد صور كل من النقط الآتية :

$(-7, 3) \quad (3, -2) \quad (0, 2) \quad (2, -3)$

تحت كل من الدورانات الآتية

$G_O(\pi) \;,\; G_O(\frac{\pi}{2}) \;,\; G_{O'}(\pi) \;,\; G_{O''}(\pi)$

حيث :

$O' = (1, -2)$

$O'' = (-1, 3)$

الحل

[١] النقطة $(-7, 3)$

$G_O(\pi)(-7,3) = (7, -3)$

$G_O(\frac{\pi}{2})(-7,3) = (-3, -7)$

$G_{O'}(\pi)(-7,3) = (2+7, -4-3) = (9, -7)$

$G_{O''}(\pi)(-7,3) = (-2+7, 6-3) = (5, 3)$

[٢] النقطة $(3, -2)$

$G_O(\pi)(3,-2) = (-3, 2)$

$G_O(\frac{\pi}{2})(3,-2) = (2, 3)$

$G_{O'}(\pi)(3,-2) = (2-3, -4+2) = (-1, -2)$

$G_{O''}(\pi)(3,-2) = (-2-3, 6+2) = (-5, 8)$

٢ النقطة $(3,-2)$

$G_o(\pi)(3,-2) = (-3,2)$

$G_o(\frac{\pi}{2})(3,-2) = (2,3)$

$G_{o'}(\pi)(3,-2) = (2-3,-4+2) = (-1,-2)$

$G_{o''}(\pi)(3,-2) = (-2-3,6+2) = (-5,8)$

٣ النقطة $(0,2)$

$G_o(\pi)(0,2) = (0,-2)$

$G_o(\frac{\pi}{2})(0,2) = (-2,0)$

$G_{o'}(\pi)(0,2) = (2-0,-4-2) = (2,-6)$

$G_{o''}(\pi)(0,2) = (-2-0,6-2) = (-2,4)$

٤ النقطة $(2,-3)$

$G_o(\pi)(2,-3) = (-2,3)$

$G_o(\frac{\pi}{2})(2,-3) = (3,2)$

$G_{o'}(\pi)(2,-3) = (2-2,-4+3) = (0,-1)$

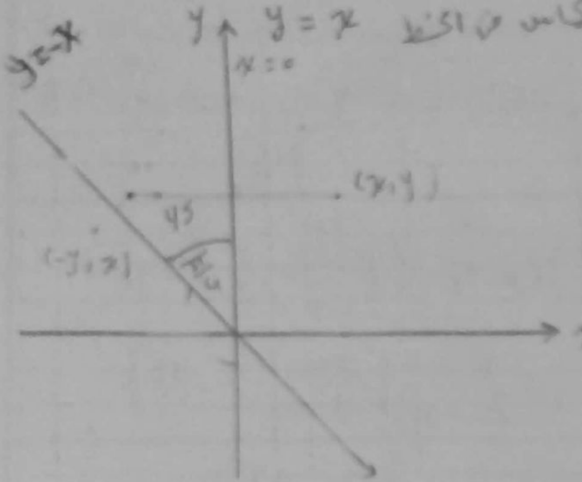
$G_{o''}(\pi)(2,-3) = (-2-2,6+3) = (-4,9)$

[١٣] أوجد x', y' بحيث $\sigma_0(\frac{\pi}{2})(x,y) = (x', y')$ في الحالات الآتية :-

① باستخدام انعكاس في محور y ثم انعكاس في الخط $x+y=0$

② باستخدام انعكاس في محور y ثم انعكاس في الخط $y = x$

الحل

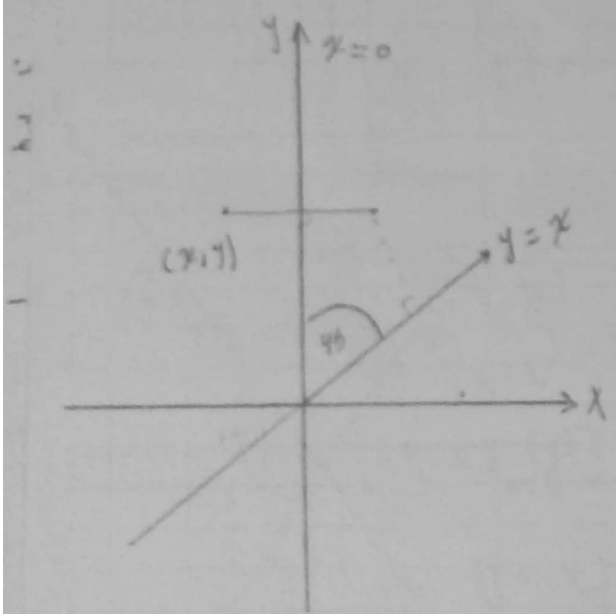


$$\sigma_0(\tfrac{\pi}{2})(x,y) = \left(R_{y=-x} \circ R_{x=0}\right)(x,y) \quad \boxed{1}$$

$$= R_{y=-x}\left[R_{x=0}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=-x}(-x,y)$$

$$\sigma_0(\tfrac{\pi}{2})(x,y) = (-y,x)$$



$$\sigma_0(\tfrac{\pi}{2})(x,y) = \left(R_{y=x} \circ R_{x=0}\right)(x,y) \quad \boxed{2}$$

$$= R_{y=x}\left[R_{x=0}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=x}(-x,y)$$

$$= (y,-x)$$

$\boxed{3}$ أوجد y', x' حيث $G_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = (x', y')$

وذلك في الحالات الآتية:

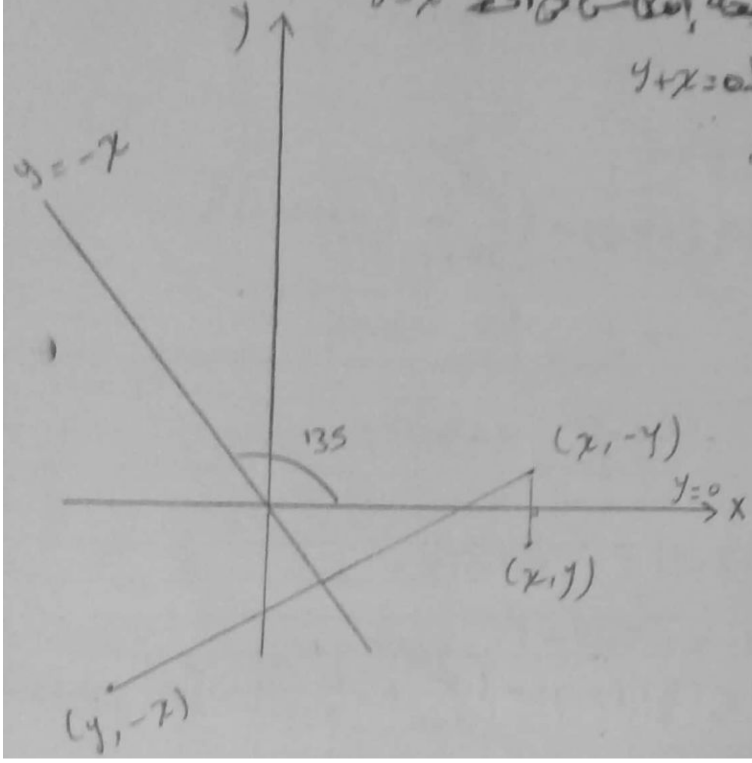
$\boxed{1}$ باستخدام الانعكاس في محور x ثم الانعكاس في الخط $y+x=0$

$\boxed{2}$ باستخدام الانعكاس في محور x والخط $y=x$

$\boxed{3}$ باستخدام الانعكاس في محور y يتبعه انعكاس في الخط $y=x$

$\boxed{4}$ في المحور y يتبعه انعكاس في الخط $y+x=0$

الحل



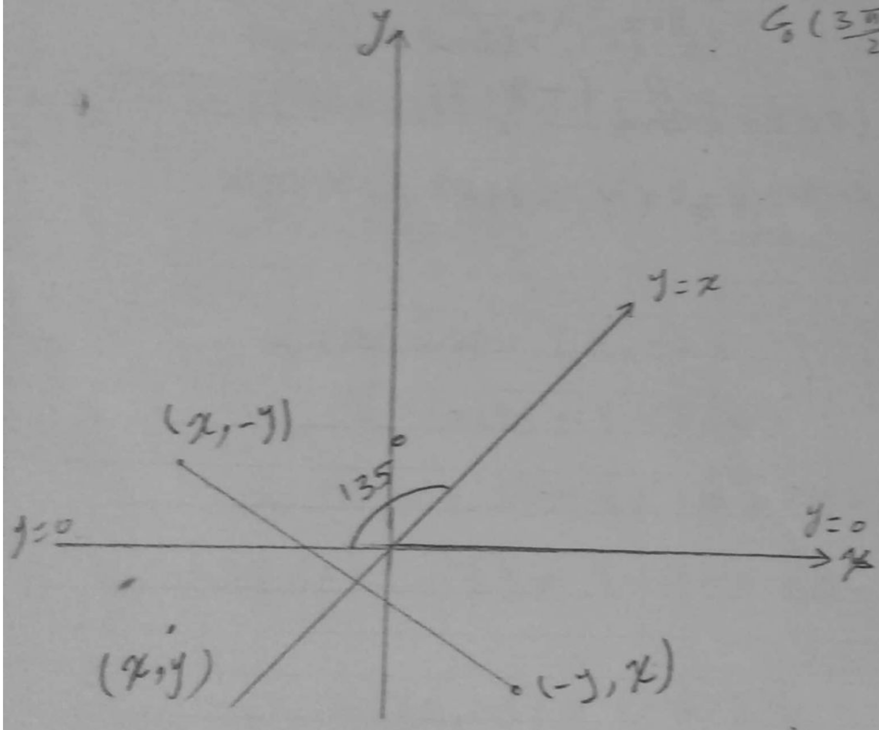
$\boxed{1}$
$$G_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = \left(R_{y=-x} \circ R_{y=0}\right)(x,y)$$
$$= R_{y=-x}\left[R_{y=0}(x,y)\right]$$
$$= R_{y=-x}(x,-y)$$
$$= (y,-x)$$

$$G_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = \left(R_{y=x} \circ R_{y=0}\right)(x,y)$$

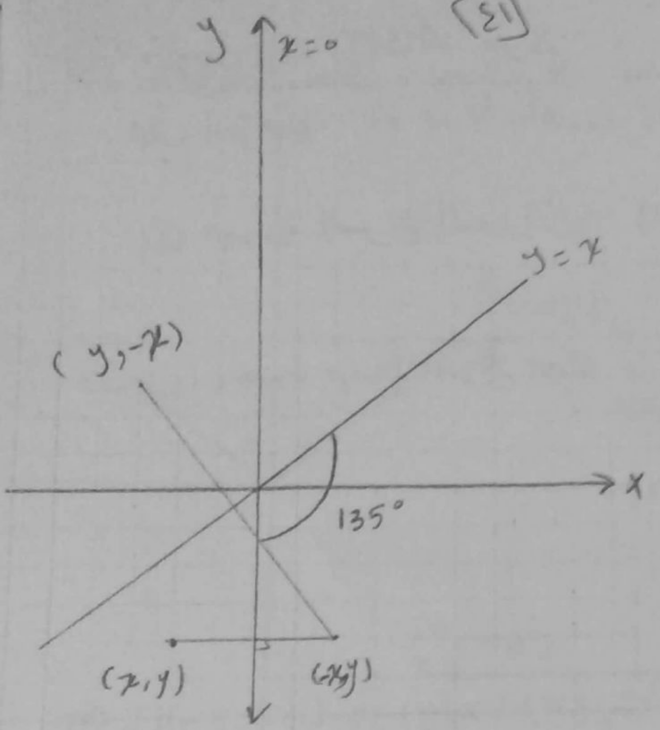
$$= R_{y=x}\left[R_{y=0}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=x}(x,-y)$$

$$= (-y, x)$$



$\boxed{٤1}$

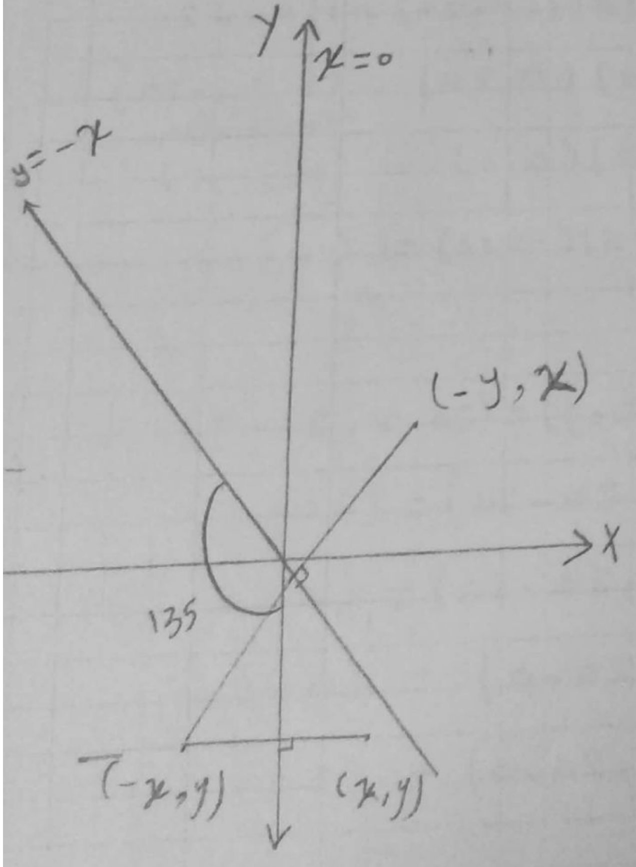


$$G_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = \left(R_{y=x} \circ R_{x=0}\right)(x,y) \quad \boxed{٤}$$

$$= R_{y=x}\left[R_{x=0}(x,y)\right]$$

$$= R_{y=x}(-x,y)$$

$$= (y,-x)$$



$$G_0\left(\frac{3\pi}{2}\right)(x,y) = \left(R_{y=-x} \circ R_{x=0}\right)(x,y) \quad \boxed{4}$$

$$= R_{y=-x}\left[R_{x=0}(x,y)\right]$$

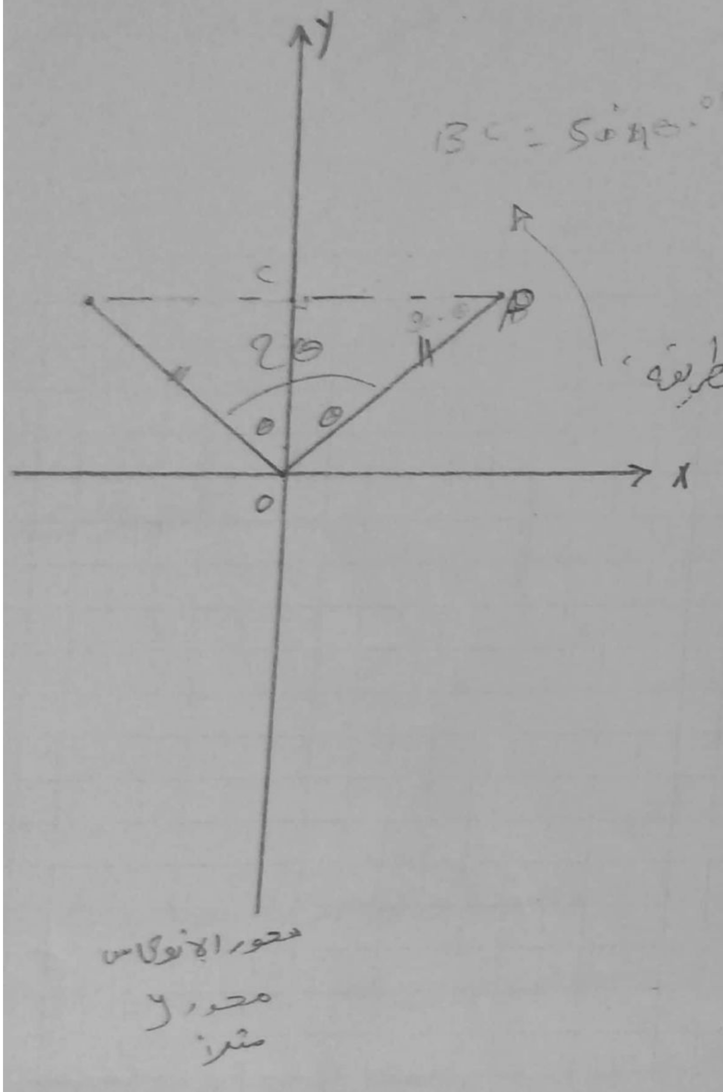
$$= R_{y=-x}(-x,y)$$

$$= (-y,x)$$

٤٣

٢) الانعكاس هو دوران للمستوى حول محور الانعكاس .. كانت الدرجات ه 180° حول محور الانعكاس .

∴ الانعكاس هو دوران للمستوى بزاوية مقدارها 180° حول محور الانعكاس



⟸ حاول اثبات تعريف للدوران بنفس الطريقة .

الدوران هو انتقال للمستوى

في اتجاه الخط المرتب (ج و ل)

مقياسه 2λ

صيغة ١٣٥ . $\lambda = \sin\theta$