محاضره1و2

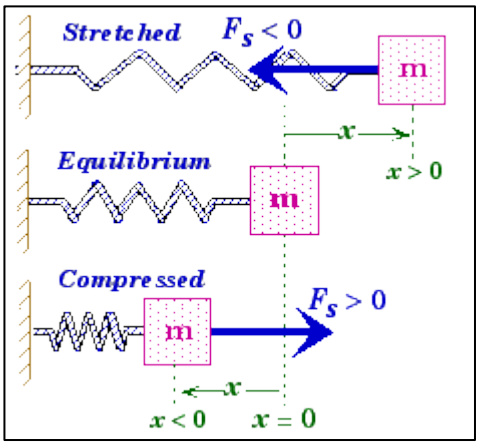
الاهتزازات

تعتبر الحركة الدورية بداية من الكتل المعلقة في زنبرك إلى اهتزازات الذرات من أهم أنواع السلوك الفيزيائي. **الحركة الدورية** هي حركة يعود فيها الجسم إلى موقع محدد بعد فترة زمنية ثابتة. فمثلا حركة الأرض حول الشمس هي حركة دورية حيث إن الأرض تعود إلى موقع محدد كل فترة محددة من الزمن .

في هذا الجزء سوف نلقى نظرة مفصلة على قانون هوك. **ينص قانون هوك على أن القوة تتناسب طرديا مع الازاحة وتميل إلى استعادة الأجسام إلى مواضع اتزانها.** هناك العديد من الأنظمة الفيزيائية التي يمكن تمثيلها بهذا النموذج مثل حركة الجزئيات في المواد الصلبة تتذبذب حول موضع اتزانها في حركة دورية مستمرة، كذلك الامواج الكهرومغناطيسية مثل أمواج الضوء وأمواج الرادار وأمواج الراديو تنتشر في الفراغ من خلال تذبذب مجالها الكهرومغناطيسي، كذلك التيار الكهربي المتردد والجهد الكهربي والشحنة الكهربية تتغير بصفة دورية مع الزمن .

اهتزازة الزنبرك و حركة البندول و انتشار الموجات من جميع الأنواع. تستطيع الاهتزازات الدورية أن تتسبب في اضطرابات تتحرك خلال الوسط على هيئة موجات. تنقسم الاهتزازات الى عدة انواع منها الاهتزازات الحرة و المتضائلة و القصرية

أولا الاهتزازات الحرة



من أبسط الحركات الاهتزازية هي حركة جسم متصل بزنبرك. اذا قمنا بسحب الزنبرك أو ضغطه مسافة x صغيرة عن موضع الاتزان ثم قمنا بتركه فإنه تتولد قوة F_s

$$F_S = -kx \qquad (1)$$

F_S قوة الزنبرك (spring force)

k ثابت الزنبرك

x الإزاحة عن موضع الاتزان

الاشارة السالبة تعنى أن اتجاه القوة دائما يكون في عكس اتجاه الإزاحة في اتجاه موضع الاتزان. وتسمى القوة F_S بقوة الاسترجاع (restoring force).

حركة الزنبرك تسمى بالحركة التوافقية البسيطة وتحدث تلك الحركة عندما تكون القوة الناتجة في اتجاه الحركة تتبع قانون هوك حيث تتناسب القوة دائما طرديا مع الازاحة عن موضع الاتزان وتتجه دائما نحوها.

يمكن وصف أي حركة اهتزازية بثلاثة عناصر رئيسية :

1- **السعة (Amplitude A)**
هي أكبر إزاحة للجسم عن موضع الاتزان.
2- **الزمن الدوري (periodic time T)**
الزمن الذى يستغرقه الجسم لعمل اهتزازه واحده كاملة حول موضع الاتزان.
3- **التردد (frequency f)**
عدد الاهتزازات الكاملة التي يصنعها الجسم في وحدة الزمن.

$$f = \frac{1}{T}$$

يمكن حساب العجلة لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة من قانون هوك وقانون نيوتن الثاني كالاتي:

$$F = -kx$$
$$F = ma$$
$$a = -\frac{k}{m}x$$

- **طاقة الوضع (potential energy)**

هى كمية الطاقة المختزنة في جسم موضوع في وضع معين. وهناك نوعان لطاقة الوضع.

طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية (gravitational potential energy)

وهى الطاقة المختزنة لجسم ما نتيجة وضعه أو ارتفاعه وتكون نتيجة جذب الأرض للجسم.

$$P.E_{grav.} = mass.g.height$$
$$P.E_{grav.} = m.g.h$$

طاقة الوضع المرنة (elastic potential energy)

هى الطاقة المختزنة في جسم مرن نتيجة تمدده أو ضغطه.

الزنبرك عبارة عن وسيلة خاصة يمكنها تخزين طاقة الوضع اما نتيجة التمدد أو الضغط.

$$P.E_{spring} = \frac{1}{2}kx^2$$

طاقة الحركة (kinetic energy)

لها عدة أنواع قد تكون اهتزازية أو دورانية أو انتقالية

$$k.E = \frac{1}{2}mv^2$$

m كتلة الجسم

v سرعة الجسم المهتز

- **التمثيل الرياضي للحركة التوافقية البسيطة الناتجة عن اهتزازة الزنبرك**

سنقوم الآن باشتقاق معادلة رياضية تصف الحركة التوافقية البسيط. المعادلة (1) تحدد القوة المؤثرة على الجسم المتصل بالزنبرك والذي يتذبذب على محور x وحيث إن العجلة هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن فان العجلة a تعطى على النحو التالي :

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F = -kx \ = ma = m\ \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\ \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

أو

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\ x$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية وتمثل تغير موقع جسم بالنسبة للزمن ولإيجاد الحل نتبع الخطوات التالية:

بالضرب في $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$ للطرفين

$$m(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}})\ \frac{d^2x}{dt^2} = -kx\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$$

ولكن $\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\right)\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}}$

--→ $\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\right)\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} = -kx\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$

بتكامل طرفى المعادلة بالنسبة ل dt

-> $\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} = -\frac{1}{2}kx^2 + c$

يمكن كتابة المعادلة السابقة كالتالي:

$$c = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v^2} + \frac{1}{2}kx^2$$

يعبر الثابت c عن قيمة الطاقة الكلية للجسيم المتذبذب

بفرض أن أقصى إزاحة يصنعها الجسيم المتذبذب عن موضع الاتزان عندما تكون x=A

عند تلك النقطة تكون طاقة الوضع أكبر ما يمكن أي أن سرعة الجسيم تصل إلى الصفر

اذن

$$C = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$\left(\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{(A^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathbf{dt}$$

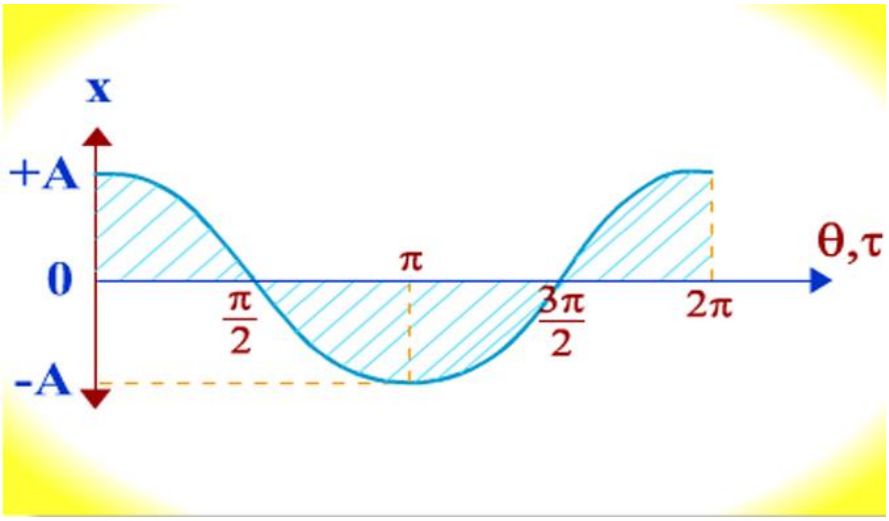
بوضع $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بالتكامل للطرفين ينتج أن

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + \varphi$$

$$\left(\frac{x}{A}\right) = \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

هذه المعادلة تصف حركة جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة



حساب قيمة الطاقة الكلية للجسيم المتذبذب

$$E_t = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{dt}}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

ولكن

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

و

$$\frac{\mathbf{d}x}{\mathbf{dt}} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_t = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

ولكن $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

اذن

$$E_t = \frac{m}{2}A^2\frac{k}{m}\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2\left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

ولكن $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$

اذن:

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2$$

وعليه فان الطاقة الميكانيكية الكلية للحركة التوافقية البسيطة ثابتة وتتناسب طرديا مع مربع السعة .

مسائل

1 - جسم يتذبذب بحركة توافقية بسيطة على محور .x موقعه يتغير بالنسبة للزمن طبقا للمعادلة التالية :

$$x = 4\ \sin(\pi t - \frac{\pi}{4})$$

حيث t الزمن بالثواني والزاوية بين القوسين مقدرة بوحدة rad.

(a)حدد مقدار السعة ، والتردد، والزمن الدوري للحركة

(b)احسب السرعة والعجلة للجسم عند أي زمن t

(c)من النتائج التي ستحصل عليها من حل الجزء B قم بحساب موضع الجسم وسرعته وعجلته عند الزمنt=1s.

2 - سيارة كتلتها 1300 kg مثبتة على أربعة زنبركات. ثابت كل زنبرك 20000 N\m. إذا صعد السيارة رجلين كتلتهما 160kg، اوجد تردد الاهتزاز للسيارة عندما تمر على أخدود ضيق على الطريق .