محاضره 3و4

3- تراكب حركتين توافقيتين

1. ازاحة الاهتزازتين في نفس الاتجاه

- **في حالة تساوى التردد والطور مع اختلاف سعة الاهتزازة للاهتزازتين**

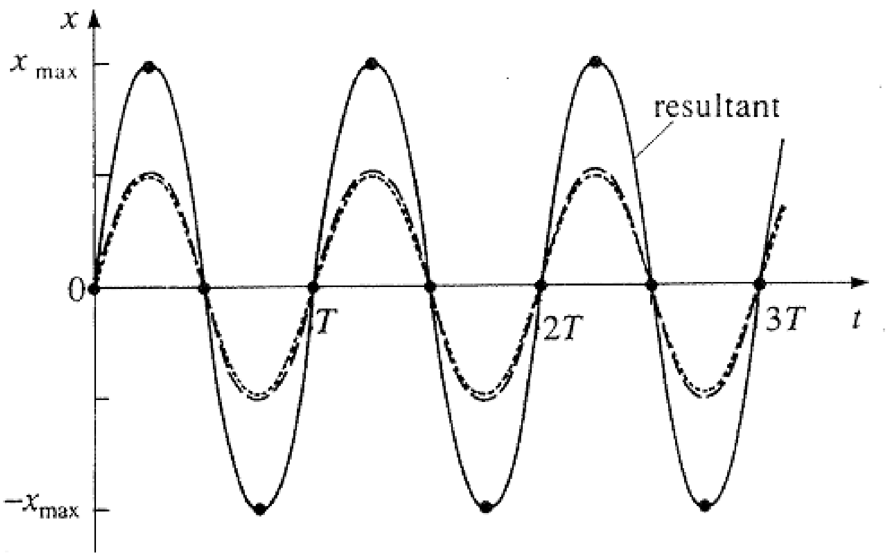
بفرض أن

$$x_1 = A_1 \sin \omega t$$
$$x_2 = A_2 \sin \omega t$$
->> $x_1 + x_2 = (A_1 + A_2) \sin \omega t$

أو

$$x = A \sin \omega t$$

وبالتالي فإن السعه الناتجة تكون عبارة عن مجموع السعتين و المحصلة لها نفس التردد و الطور للاهتزازتين كما بالشكل التالي:



- **في حالة تساوى التردد والسعه مع اختلاف الطور للاهتزازتين**

بفرض أن

$x_1 = A_1 \sin \omega t$ *(1)*

$x_2 = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$ (2)

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega t + A_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x = A_1(\sin \omega t + \sin(\omega t + \varphi))$$

$$x = A_1(\sin \omega t + \sin \omega t \ \cos \varphi + \ \cos \omega t \ \sin \varphi)$$

$$x = A_1(\sin \omega t \ (1 + \cos \varphi) + \cos \omega t \ \sin \varphi)$$

(3)

بفرض أن

$$\sin \varphi = \sin(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2})$$

$$\sin \varphi = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

->>>> $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$

(4)

أيضا

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

(5)

باستخدام المعادلتين 4 و 5 والتعويض في 3

$$x = A_1 \left[2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin \omega t + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \omega t\right]$$

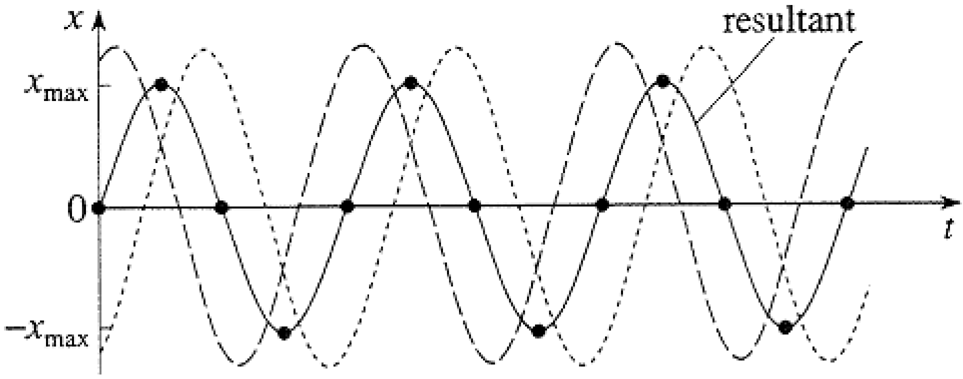
$$x = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\varphi}{2} \sin \omega t + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \omega t\right]$$

$$x = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2} \ \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

بوضع $A = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2}$ سعة الاهتزازة الناتجة

ينتج أن

$$x = A \ \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$


x
x_{max}
0
$-x_{max}$
resultant
t

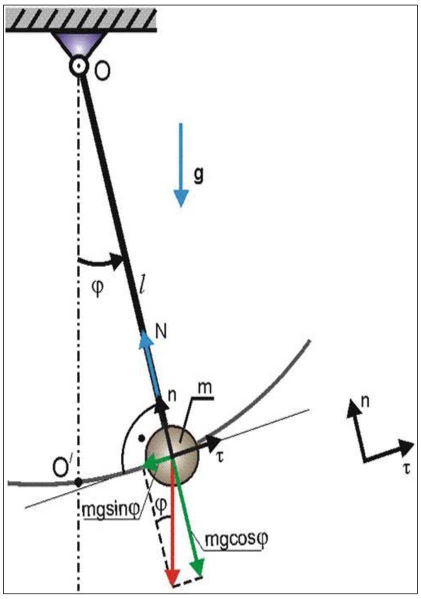
4-أنظمة تتحرك حركة دورية

1- البندول البسيط

يتكون من كرة مصمته معلقة فى خيط طوله L كما بالشكل

فى وضع الاتزان تكون القوى المؤثرة على البندول هى قوة الوزن والتى تتعادل مع قوة الشد فى الخيط T . عند عمل ازاحه بزاوية صغيرة فإن البندول يبدأ بالاهتزاز حول نقطة الاتزان بحيث

$$F = M\,a = M\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$



أيضا

$$F = -Mg\ \sin\theta \qquad (2)$$

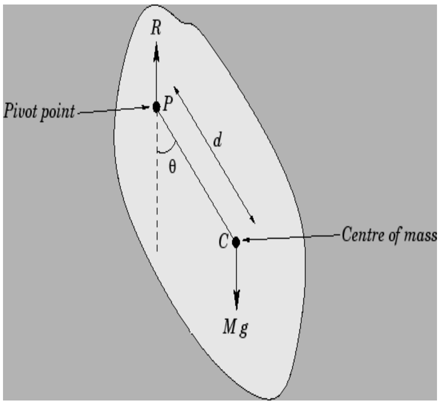
بمساواة 1 و 2

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,x \qquad (3)$$

معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

حيث g عجلة الجاذبية الأرضية



2- البندول الطبيعي (physical pendulum)

عبارة عن الحالة العامة من البندول البسيط. يتكون من جسم صلب يتذبذب حول نقطة تعليق. وفى هذه الحالة لا يمكن اهمال وزن الجسم كحالة البندول البسيط وفى هذه الحالة يعتمد زمن الذبذبة على عزم القصور الذاتي للجسم . تؤثر الجاذبية من خلال مركز الكتلة للجسم الصلب وبالتالي فإن طول البندول المستخدم يكون عباره عن المسافة بين نقطة التعليق و مركز الكتلة للجسم.
عند عمل ازاحة بزاوية صغيرة يبدأ الجسم فى التذبذب حول نقطة التعليق ونتيجة لذلك يتولد عزم ازدواج فى البندول مقداره

$$G = -I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (5)$$

هذا الازدواج يقابله ازدواج آخر نتيجة كتلة البندول المتحرك ويكون مساوى له فى المقدار و مضاد له فى الاتجاه يعمل على تقليل الحركة ليصل البندول إلى وضع الاتزان مرة أخرى بحيث:

$$G = Mgh\ \sin\theta \qquad (6)$$

بمساواة المعادلات 5 و 6

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\theta$$

المعادلة السابقة تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

$$I = Md^2 + Mk^2$$

بالتعويض عن قيمة I عزم القصور الذاتى ينتج أن:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^2 + k^2}{gd}}$$