محاضره 5و6

5- الحركة التوافقية البسيطة المتضائلة

اذا كان الجسيم المتذبذب يتحرك حركة توافقية بسيطة في وسط مقاوم للذبذبة فإن قوته ستتناقص تدريجيا بتأثير القوة المقاومة للحركة حتى يصل إلى وضع الاتزان.
وتتخذ القوة الشكل التالي:

$$f = -b\,\frac{dx}{dt} - kx$$

وتتخذ معادلة الحركة الشكل:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (1)$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية. ولدراسة الحركة يلزم علينا ايجاد حل المعادلة x

بفرض أن الحل يمكن كتابته على الصورة

$$x = Ae^{\alpha t}$$

then $\frac{dx}{dt} = \alpha\, Ae^{\alpha t} = \alpha\, x$

and $\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2\, Ae^{\alpha t} = \alpha^2\, x$

بالتعويض في المعادلة 1

$$m\,\alpha^2\, x + b\,\alpha\, x + k\,x = 0$$

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\,\alpha + \frac{k}{m} = 0$$

هذه معادلة من الدرجة الثانية لها جذران

$$\alpha_{1,2} = \left(-\frac{b}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}}\right) \backslash 2$$

$$\alpha_{1,2} = \left(-\frac{b}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{4m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)$$

بوضع $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

و $\gamma = \frac{b}{2m}$ ويسمى بمعامل التضاؤل اذن

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \mp (\gamma^2 - \omega_0{}^2)^{1\backslash 2}$$

الأن لإيجاد جذري المعادلة هناك ثلاثة احتمالات كالتالي

1) $\omega_0 > \gamma$

يكون الجذران تخيليان

let $\omega_1{}^2 = \gamma^2 - \omega_0{}^2$

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \mp \omega_1$$
$$\alpha_1 = -\gamma + i\omega_1$$
$$\alpha_2 = -\gamma - i\omega_1$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$
$$x = A_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t}$$

notice that

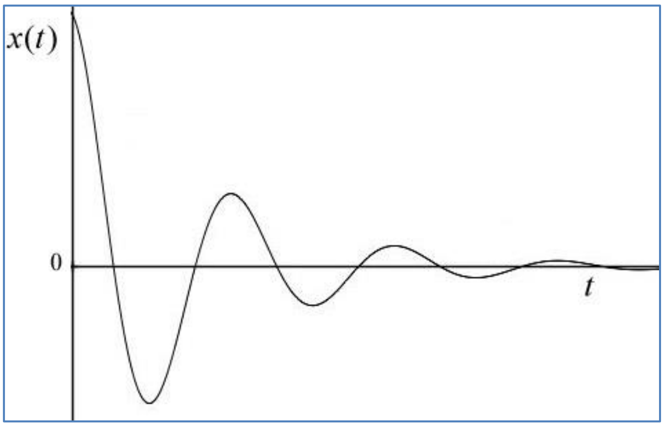
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

and $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

put $A_1 = \frac{A}{2}\, e^{i\varphi}$, $A_2 = \frac{A}{2}\, e^{-i\varphi}$

$$x = \frac{A}{2} e^{-\gamma t} e^{i(\omega_1 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-\gamma t} e^{-i(\omega_1 t + \varphi)}$$

$$x = \frac{A}{2} e^{-\gamma t}\left(e^{i(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_1 t + \varphi)}\right)$$



$$x = \frac{A}{2} e^{-\gamma t}\, .2\cos(\omega_1 t + \varphi)$$
$$x = A\, e^{-\gamma t}\, \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

this is called perfect damping

هذه المعادلة تمثل حركة اهتزازية تضاؤليه

تتناقص سعتها تدريجيا بصورة أسية مع الزمن و تكون قيمة السعة $A\ e^{-\gamma t}$

6- لحساب الطاقة الكلية للجسيم المتذبذب في هذه الحالة

$$E_t = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}{\mathbf{dt}}\right)^{\mathbf{2}} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = A\ \omega_1 e^{-\gamma t}\ \text{Sin}(\omega_1 t + \varphi)$$

$$E_t = \frac{m}{2}A^2\ {\omega_1}^2 e^{-2\gamma t}\ \text{Sin}^2(\omega_1 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\ e^{-2\gamma t}\ \cos^2(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1 = \frac{k}{m}\ \text{ then } k = m\omega_1$$

$$E_t = \frac{1}{2}A^2\ k\ e^{-2\gamma t}\ \text{Sin}^2(\omega_1 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\ e^{-2\gamma t}\ \cos^2(\omega_1 t + \varphi)$$

$$E_t = \frac{1}{2}A^2\ k\ e^{-2\gamma t} = E_0\ e^{-2\gamma t}$$

E_0 هى الطاقة الكلية فى حالة عدم وجود تضاؤل . ونلاحظ أن الطاقة الكلية تتناقص اسيا بضعف معدل تناقص السعة.

2) $\boldsymbol{\omega_0 < \gamma}$

$$\alpha_1 = -\gamma + (\gamma^2 - {\omega_0}^2)^{1\backslash 2}$$

$$\alpha_2 = -\gamma - (\gamma^2 - {\omega_0}^2)^{1\backslash 2}$$

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

over damped

الحل في هذه الحالة يتناقص الحدان بصوره أسية ولكن أحدهما يتناقص أسرع من الحد الأول وتكون هذه الحركة غير اهتزازية وتتلاشى بمرور الزمن وتسمى بالحركة زائدة التضاؤل (over damped).

3) $\boldsymbol{\omega_0 = \gamma}$

فى هذه الحالة يكون الجذران متساويان

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$$

ويكون الحل العام لمعادلة الحركة كالتالي:

$$x = (A_1 + A_2)e^{-\gamma t}$$

وفى هذه الحالة تتناقص أسيا مع الزمن وتعرف بالتضاؤل الحرج(critical damping)

يتضح من الحالات السابقة أنه لا تحدث اهتزازات كاملة للجسيم المتحرك بل يعود إلى وضع الاستقرار بعد فترة طويلة من الزمن.