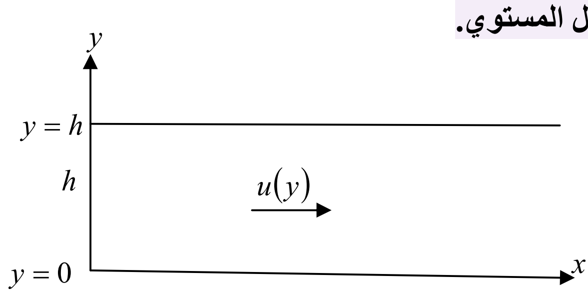
المحاضرتان العاشرة والحادية عشر

مثال

ادرس السريان الطبقي المطرد لمائع لزج نيوتوني وغير قابل للإنضغاط بين لوحين متوازيين لانهائيين والبعد بينهما h وذلك في غياب القوة الحجمية ثم ادرس سريان كاويت المستوي و سريان كاويت المستوي المعمم وسريان بوازيل المستوي.

الحل



نفرض أن أحد اللوحين موضوع عند $y=0$ والآخر عند $y=h$ وأن السريان في اتجاه محور x فقط أي أن متجه سرعة السريان تكون على الصورة $\vec{v}=(u(y),0,0)$ وحيث أن السريان مطرد فإن متغيرات المائع لا تعتمد على الزمن. وحيث أم المائع غير قابل للإنضغاط فإن معادلة الاستمرارية أو الإتصال تكون على الصورة التالية

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

وحيث أن مركبات متجه سرعة السريان هي $\vec{v}=(u(y),0,0)$ فإن معادلة الاستمرارية أو الاتصال تتحقق بالتطابق.

ومعادلات نافير-استوك في الإحداثيات الكارتيزية في حالة السريان المطرد في بعدين وفي عدم وجود قوة حجمية خارجية تكون

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (3)$$

وفي حالة السريان المطرد بين لوحين لانهائيين وفي عدم وجود قوة حجمية خارجية تختزل معادلات نافير-استوك إلى المعادلتين التاليين

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{d^{2}u}{dy^{2}} \qquad \textbf{(4)}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \textbf{(5)}$$

من المعادلة (5) يتضح أن الضغط لا يعتمد على y وتصبح المعادلة (4) على الصورة التالية

$$0=-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^{2}u}{dy^{2}} \qquad (6)$$

وبتفاضل (6) بالنسبة إلى x نحصل على $0=-\frac{d^{2}p}{dx^{2}}\Rightarrow\frac{dp}{dx}=-P$ وبذلك تصبح المعادلة (6) على الصورة التالية

$$\frac{d^{2}u}{dy^{2}}=-\frac{P}{\mu} \qquad (7)$$

وبتكامل (7) مرتين بالنسبة إلى y نحصل على

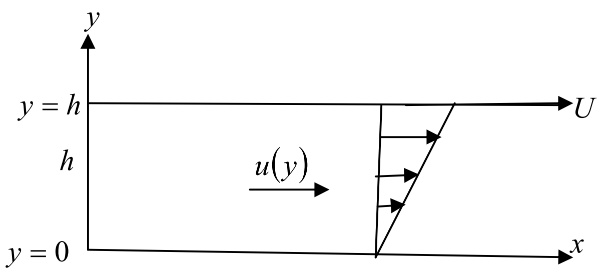
$$u=-\frac{P}{2\mu}y^{2}+Ay+B \qquad (8)$$

حيث A,B ثابتان يعينان من الشروط الحدية للمسألة.

والإجهاد القصي (shearing stress) طبقا لقانون نيوتن للزوجة يكون

$$\tau_{xy} = \mu \frac{d\,\mathrm{u}}{d\,\mathrm{y}} = \mu\, A - \mathrm{P}\,\mathrm{y} \qquad \mathbf{(9)}$$

a- Plane Couette flow **سريان كاويت المستوي**



في حالة سريان كاويت المستوي تكون الشروط الحدية للمسألة على الصورة التالية

$$\mathrm{u} = U \ \text{ at } \mathrm{y} = h,\ \mathrm{u} = 0 \ \text{ at } \ \mathrm{y} = 0,\ P = 0 \qquad (10)$$

وبالتعويض من (10) في (8) نحصل على $A = \frac{U}{h}, B = 0$ وتصبح (8) على الصورة

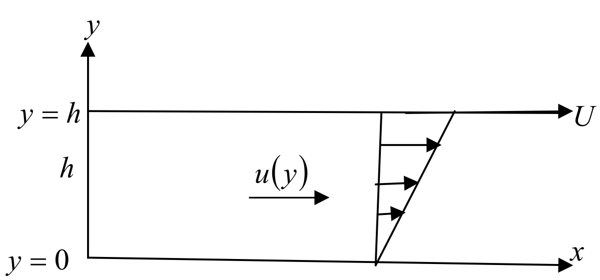
التالية

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{U}}{h}\mathrm{y} \qquad (11)$$

ويصبح الإجهاد القصي على الصورة التالية

$$\tau_{xy} = \mu \frac{U}{h} \qquad \mathbf{(12)}$$

b- Generalized Plane Couette flow **سريان كاويت المستوي المعمم**



في حالة سريان كاويت المستوي المعمم تكون الشروط الحدية للمسألة على الصورة التالية

$$u = U \quad \text{at}\; y = h,\; u = 0 \quad \text{at} \;\; y = 0,\; P \neq 0 \qquad (13)$$

وبالتعويض من (13) في (8) نحصل على $A = \dfrac{U}{h} + \dfrac{P h}{2\mu}, B = 0$ وتصبح (8) على

الصورة التالية

$$u = -\frac{P}{2\mu} y^2 + \left(\frac{U}{h} + \frac{P h}{2\mu}\right) y$$

أو على الصورة التالية

$$\frac{u}{U} = \frac{y}{h} + \alpha \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) \qquad (14)$$

حيث $\alpha = \dfrac{P h^2}{2\mu U}$ وتسمى تدرج الضغط اللابعدي

تعيين السرعة المتوسطة والسرعة القصوى للسريان

تعين السرعة المتوسطة للسريان من المعادلة التالية

$$u_a = \frac{1}{h}\int_0^h u \, dy \qquad \textbf{(15)}$$

وبالتعويض من (14) في (15) نحصل على

$$u_a = U\left(\frac{\alpha + 3}{6}\right)$$

ولايجاد أقل سرعة أو أقصى سرعة للسريان نضع $\frac{du}{dy}=0$ وذلك بتفاضل المعادلة (14)

بالنسبة إلى y ومساواة الناتج بالصفر نحصل على $y=\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$ وبالتعويض بهذه

القيمة في المعادلة (14) نحصل على

$$\text{u}=\frac{U}{4}\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} \qquad \textbf{(16)}$$

واضح من المعادلة (16) أن السرعة u تكون أقص سرعة عندما $\alpha=1$ وتكون أقل ما

يمكن عندما $\alpha=-1$

ولتعيين الإجهاد القصي والإحتكاك السطحي ومعامل الإحتكاك

حيث أن الإجهاد القصي للسريان يعطى بالعلاقة

$$\tau_{xy}=\mu\frac{d\,\text{u}}{d\,\text{y}} \qquad \textbf{(17)}$$

وبالتعويض من (14) في (17) نحصل على

$$\tau_{xy}=\mu\frac{U}{h}\left[1+\alpha\left(1-2\frac{y}{h}\right)\right]$$

وبالتالي يكون الإحتكاك السطحي عند $y=0, y=h$ بالصورتين التاليتين

$$\tau_{xy}\big|_{y=0}=\mu\frac{U}{h}(1+\alpha) \qquad \textbf{(18)}$$

$$\tau_{xy}\big|_{y=0}=\mu\frac{U}{h}(1-\alpha) \qquad \textbf{(19)}$$

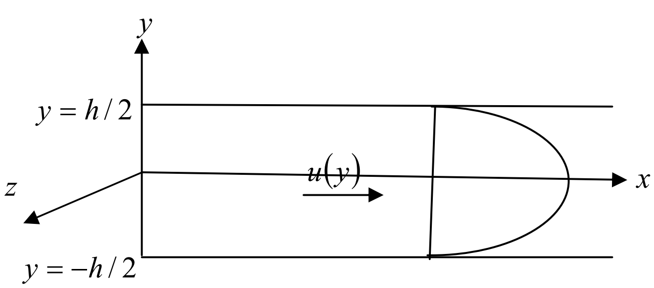
و يكون معامل الإحتكاك السطحي C_f, C'_f عند $y=0, y=h$ على الترتيب بالصورتين التاليتين

$$C_f = \frac{\tau_{xy}\big|_{y=0}}{\frac{1}{2}\rho u_a^2} = 2\mu \frac{U}{h} \frac{(1+\alpha)}{\rho u_a^2} \qquad \textbf{(20)}$$

$$C'_f = \frac{\tau_{xy}\big|_{y=h}}{\frac{1}{2}\rho u_a^2} = 2\mu \frac{U}{h} \frac{(1-\alpha)}{\rho u_a^2} \qquad \textbf{(21)}$$

وحيث أن $U = \frac{6u_a}{3+\alpha}$ فإن $C'_f = \frac{12(1-\alpha)}{\text{Re}(3+\alpha)}$, $C_f = \frac{12(1+\alpha)}{\text{Re}(3+\alpha)}$.

c- Plane Poiseuille flow **سريان بوازيل المستوي**



في حالة سريان بوازيل المستوي تكون الشروط الحدية للمسألة على الصورة التالية

$$\text{u} = 0 \ \text{ at y} = \pm\frac{h}{2},\ \ P \neq 0 \qquad (22)$$

وبالتعويض من (22) في (8) نحصل على $A = 0, B = \frac{Ph^2}{8\mu}$ وتصبح (8) على الصورة

التالية

$$\text{u} = \frac{P h^2}{8\mu}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right) \qquad (23)$$

نلاحظ من المعادلة (23) أن أقصى سرعة تكون عند $y = 0$ أي أن

$$\text{u}_{\max} = \frac{P h^2}{8\mu} \qquad (24)$$

وتعين السرعة المتوسطة من العلاقة التالية

$$\mathrm{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} u\, dy \qquad (25)$$

وبالتعويض من (23) في (25) وحساب التكامل نحصل على

$$\mathrm{u}_{\mathrm{a}} = \frac{P\, h^2}{12\,\mu} \qquad (26)$$

من المعادلتين (26) ,(24) نجد أن $\mathrm{u}_{\mathrm{a}} = \frac{2}{3}\mathrm{u}_{\max}$ ومن المعادلة (26) نحصل على

$. P = \frac{12\,\mu\, \mathrm{u}_{\mathrm{a}}}{h^2}$

الإجهاد القصي في سريان بوازيل يكون على الصورة

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{d\,\mathrm{u}}{d\,\mathrm{y}} \qquad (27)$$

وبتفاضل (23) بالنسبة إلى y والتعويض في (27) نحصل على

$$\tau_{xy} = P\, y \qquad (28)$$

ويكون الإحتكاك السطحي في سريان بوازيل عند اللوحين $\mathrm{y} = \pm\frac{\mathrm{h}}{2}$ على الصورة التالية

$$\tau_{xy}\Big|_{y=\pm h/2} = \pm P\, h/2 = \pm 6\,\mu\, u_a / h \qquad (29)$$

ومعامل الإحتكاك يكون على الصورة التالية

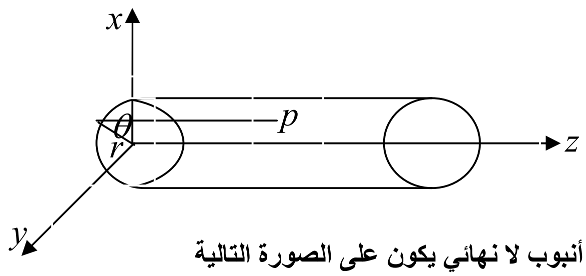
$$C_f = \frac{\tau_{xy}\Big|_{y=h/2}}{\frac{1}{2}\rho\, u_a^2} = \frac{12\,\mu}{h\,\rho\, u_a} = \frac{12}{\mathrm{Re}} \qquad \mathbf{(30)}$$

$$C'_f = \frac{\tau_{xy}\Big|_{y=-h/2}}{\frac{1}{2}\rho\, u_a^2} = -\frac{12\,\mu}{\rho\, h\, u_a} = -\frac{12}{\mathrm{Re}} \qquad \mathbf{(31)}$$

حيث $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho h u_a}{\mu}$.

<u>مثال</u>

ادرس السريان الطبقي المطرد لمائع نيوتوني لزج وغير قابل للإنضغاط خلال أنبوب لانهائي نصف قطره a وذلك في غياب القوى الحجمية الخارجية.



<u>الحل</u>

حيث ان متجه السرعة لسريان مائع نيوتوني لزج وغير قابل للإنضغاط في أنبوب لا نهائي يكون على الصورة التالية

$$\vec{v} = \left(0, 0, w(r)\right) \qquad (1)$$

المعادلات الحاكمة لهذا السريان هي

معادلة الإتصال أو الإستمرارية وصورتها العامة في الإحداثيات الإسطوانية في حالة الحركة المطردة تكون

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

حيث (u, v, w) مركبات السرعة في إتجاهات r, θ, z على الترتيب. وبالتعويض من (1) في (2) نحصل على أن معادلة الإستمرارية متحققة بالتطابق.

معادلة نافير-استوك في حالة السريان المطرد في غياب القوة الحجمية في الصورة الإتجاهية تكون

$$\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{v} \qquad (3)$$

وباستخدام (1) والمعادلة (3) نحصل على

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad (4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{d r}\right) = 0 \qquad (5)$$

ومن (4) يتضح أن p لا يعتمد على r, θ وتصبح (5) على الصورة

$$-\frac{d p}{d z} + \mu\left(\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{d r}\right) = 0 \qquad (6)$$

وبتفاضل (6) بالنسبة إلى z نحصل على

$$\frac{d^2 p}{d z^2} = 0 \Rightarrow \frac{d p}{d z} = -P \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (6) نحصل على

$$\frac{d^2w}{d\,r^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{d\,r}+\frac{P}{\mu}=0 \qquad (8)$$

وبوضع $S=\frac{dw}{d\,r}$ فإن $\frac{dS}{d\,r}=\frac{d^2w}{d\,r^2}$ وتصبح (8) على الصورة التالية

$$\frac{dS}{d\,r}+\frac{1}{r}S=-\frac{P}{\mu} \qquad (9)$$

المعادلة (9) تمثل معادلة تفاضلية خطية حلها العام يكون على الصورة التالية

$$S=-\frac{P}{2\mu}r+\frac{C}{r} \qquad (10)$$

أي أن

$$\frac{dw}{dr}=-\frac{P}{2\mu}r+\frac{C}{r} \qquad (11)$$

وبفصل المتغيرات للمعادلة (11) والتكامل نحصل على

$$w=-\frac{P}{4\mu}r^2+C\ln r+D \qquad (12)$$

حيث C, D ثابتان يعينان من الشروط الحدية للمسألة وهي

$$\begin{aligned} &w\ finit \quad at\ \ r=0 \\ &w=0 \quad at\ \ r=a \end{aligned} \qquad (13)$$

وباستخدام (13) في (12) نحصل على $C=0,\ D=\frac{P}{4\mu}a^2$ وتصبح (12) على الصورة التالية

$$w=-\frac{P}{4\mu}\left(r^2-a^2\right) \qquad (14)$$

ومن (14) يتضح أن أقصى سرعة للسريان عند $r=0$ وتكون

$$w_{\max}=\frac{Pa^2}{4\mu} \qquad (15)$$

والسرعة المتوسطة للسريان تعين من العلاقة التالية

$$w_a=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} w\,r\,dr\,d\theta \qquad (16)$$

وبالتعويض من (14) في (16) والتكامل نحصل على

$$w_a=\frac{Pa^2}{8\mu} \qquad (17)$$

ومن (17) ,(15) يتضح أن $w_a=\frac{1}{2}w_{\max}$

ويعين الإجهاد القصي للسريان من العلاقة التالية

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dw}{dr} \qquad (18)$$

ومن (14) نحصل على

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{P}{2\mu} r \qquad (19)$$

وبالتعويض من (19) في (18) نحصل على الإجهاد القصي للسريان عند أي موضع على الصورة التالية

$$\tau_{rz} = \frac{P}{2} r \qquad (20)$$

ويكون الإحتكاك السطحي $\tau_{rz}\big|_{r=a} = \frac{P}{2} a$ **ويكون السحب لوحدة الأطوال من الأنبوب**

$$Drag = 2\pi a \tau_{rz}\big|_{r=a} = \pi P a^2$$

<u>مثال</u>

ادرس السريان الطبقي المطرد لمائع نيوتوني لزج وغير قابل للإنضغاط ومحصور في الفجوة بين إسطوانتين لانهائيتين متحدتين المحور ونصفي قطريهما r_1, r_2 بحيث $r_2 > r_1$ علما بأن الإسطوانة الداخلية تدوربسرعة زاوية ω_1 **والإسطوانة الخارجية تدور بسرعة زاوية** ω_2 **وذلك في غياب القوى الخارجية.**

<u>الحل</u>

Flow between Two Concentric Rotating Cylinders

An example which leads to an exact solution of Navier-Stokes equation is the flow between two concentric rotating cylinders.

Consider flow in the annulus of two cylinders (Fig. 1), where r_1 and r_2 are the radii of inner and outer cylinders, respectively, and the cylinders move with different rotational speeds ω_1 and ω_2 respectively

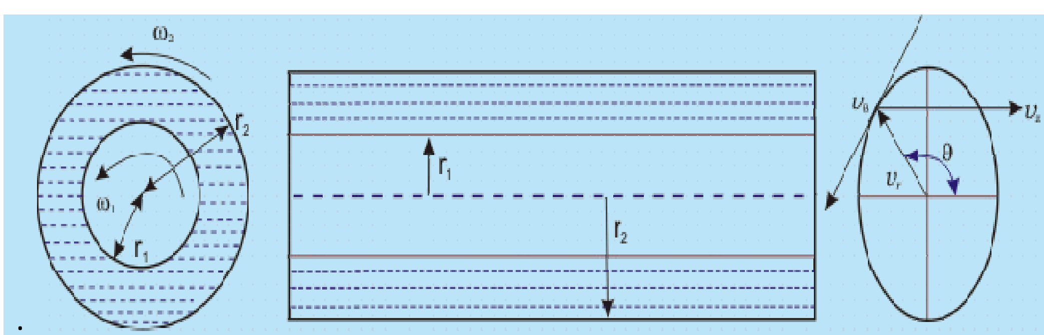


FIG 1- Flow between two concentric rotating cylinders

From the physics of the problem we know, , $v_z = 0, v_r = 0$.

From the continuity Eq. and these two conditions, we obtain

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

which means v_θ is not a function of θ. Assume z dimension to be large enough so that end effects can be neglected and $\frac{\partial}{\partial z}$ (any property) = 0.

This implies $v_\theta = v_\theta(r)$. With these simplifications and assuming that "θ symmetry" holds good, Navier-Stokes equation reduces to

$$\frac{\rho v_\theta^2}{r} = \frac{d\,p}{d\,r} \tag{1}$$

and

$$\frac{d^2 v_\theta}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\,v_\theta}{d\,r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 \tag{2}$$

Equation (1) signifies that the centrifugal force is supplied by the radial pressure, exerted by the wall of the enclosure on the fluid. In other words, it describes the radial pressure distribution.
From Eq. (2) (26.18), we get

$$\frac{d}{d\,r}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left(r\,v_\theta\right)\right] = 0$$

$$\frac{d}{d\,r}\left(r\,v_\theta\right) = A\,r \text{ or } v_\theta = \frac{A\,r}{2} + \frac{B}{r} \tag{3}$$

For the azimuthal component of velocity, v_θ, the boundary conditions are: at $r = r_1, v_\theta = r_1\omega_1$ at $r = r_2, v_\theta = r_2\omega_2$.

Application of these boundary conditions on Eq. (3) will produce

$$A = 2\left[\omega_1 - \frac{r_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{r_2^2 - r_1^2}\right]$$

and

$$B = \frac{r_1^2 r_2^2 \left(\omega_1 - \omega_2\right)}{r_2^2 - r_1^2}$$

Finally, the velocity distribution is given by

$$v_\theta = \frac{1}{\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \left[\left(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2\right) r + \frac{r_1^2 r_2^2 \left(\omega_1 - \omega_2\right)}{r} \right] \tag{4}$$

Calculation of Stress and Torque Transmitted

Now, $\tau_{r\theta} = \mu \dot{\gamma}_{r\theta}$ is the general stress-strain relation.

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

or

In our case,

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{d r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \tag{5}$$

Equations (4) and (5) yields

$$\tau_{r\theta} = \frac{2\mu r_1^2 r_2^2 \left(\omega_2 - \omega_1\right)}{\left(r_2^2 - r_1^2\right) r^2} \tag{6}$$

Now,

$$\tau_{r\theta} \Big| r = r_1 = \frac{2\mu r_2^2 \left(\omega_2 - \omega_1\right)}{r_2^2 - r_1^2}$$

and,

$$\tau_{r\theta} \Big| r = r_2 = \frac{2\mu r_1^2 \left(\omega_2 - \omega_1\right)}{r_2^2 - r_1^2}$$

For the case, when the inner cylinder is at rest and the outer cylinder rotates, the torque transmitted by the outer cylinder to the fluid is

$$T_2 = \frac{2\mu r_1^2 \omega_2}{r_2^2 - r_1^2} 2\pi r_2 \, l \, r_2$$

Or

$$T_2 = \frac{4\pi \mu l r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\omega_2 \qquad (7)$$

where l is the length of the cylinder.

The moment T_1, with which the fluid acts on the inner cylinder has the same magnitude. If the angular velocity of the external cylinder and the moment acting on the inner cylinder are measured, the coefficient of viscosity can be evaluated by making use of the Eq. (7).

إذا كانت مركبات السرعة لسريان مطرد لمائع لزج ولزوجته ثابتة وغير قابل للإنضغاط هي

$u(y) = y\frac{U}{h} + \frac{h^2}{2\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}\right), v = w = 0$ فأثبت أن مركبات السرعة تحقق معادلة الحركة وذلك

في عدم وجود قوة حجمية تؤثر على المائع حيث $h, U, \frac{dp}{dx}$ ثوابت وأن $p = p(x)$.

الحل

حيث أن معادلة الحركة لمائع لزج ولزوجته ثابتة وغير قابل للإنضغاط في عدم وجود قوة حجمية تؤثر على المائع في الصورة الإتجاهية تكون

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} P + \mu \nabla^2 \underline{v}, \qquad (1)$$

وحيث أن السريان مطرد فإن المعادلة (1) تصبح على الصورة

$$\rho(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = -\underline{\nabla} P + \mu \nabla^2 \underline{v}, \qquad (2)$$

وحيث أن مجال سرعة المائع على الصورة $\underline{v} = u(y)\hat{i}$ فإن $\rho(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{0}$ وتصبح المعادلة (2) على الصورة

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}, \qquad (3)$$

وحيث أن $u(y) = y\frac{U}{h} + \frac{h^2}{2\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2}\right)$ فإن طرفي المعادلة (3) يكونان متساويان وبذلك تكون معادلة الحركة للمائع متحققة.

مثال: إذا كانت مركبات السرعة لسريان مطرد لمائع لزج ولزوجته ثابتة وغير قابل للإنضغاط هي $u = v = 0, w = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + A\ln r + B,$ فأثبت أن مركبات السرعة تحقق معادلة الحركة وذلك في عدم وجود قوة حجمية تؤثر على المائع حيث A, B, μ ثوابت.

Consider a two-dimensional viscous incompressible steady flow with velocity components $u = v = 0, w = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + A\ln r + B,$ **where** $A, B,$ and μ are constants. Is the equation of motion with negligible body force satisfied?

Solution

Since the equation of motion of viscous incompressible fluid with negligible body force and constant viscosity is

$$\rho\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla}P + \mu\nabla^2\underline{v}, \tag{1}$$

Since the flow is steady then (1) becomes

$$\rho(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = -\underline{\nabla}P + \mu\nabla^2\underline{v}, \tag{2}$$

Since the velocity field of the fluid is $\underline{v} = w(r,z)\hat{k}$ then $\rho(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{0}$ and (2) becomes

$$\frac{dP}{dz} = \mu\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right), \tag{3}$$

Since $w = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + A\ln r + B,$ then equation (3) is satisfied