متسلسلتا تيلور ولورانت

بند (١): متتابعات الدوال:

لتكن $U_1(z), U_2(z), \ldots, U_n(z)$ ويرمز لها باختصار $\{U_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة دوال في المتغير z وهذه الدوال معرفة ووحيدة القيمة في منطقة ما R في المستوى Z.

تسمى $V(z)$ بنهاية $U_n(z)$ عندما $n \to \infty$ وتكتب $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z) = V(z)$.

إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد موجب N (عادة يعتمد على كل من z, ε) بحيث يكون $|U_n(z) - V(z)| < \varepsilon$ لجميع $n \in N$ في هذه الحالة نقول أن المتتابعة تتقارب إلى $V(z)$.

إذا كانت المتتابعة تقاربية لجميع قيم z (نقاط) في منطقة R فإننا نسمي R بمنطقة تقارب المتتابعة. والمتتابعة التي ليست تقاربية عند قيمة ما للمتغير z (نقطة) تسمى تباعدية عند z.

بند (٢): متسلسلات الدوال:

من متتابعات الدوال $\{U_n(z)\}$ تكون متتابعة جديدة $\{S_n(z)\}$ معرفة بالآتي:

$$S_1(z) = U_1(z)$$

$$S_2(z) = U_1(z) + U_2(z) = \sum_{k=1}^{2} U_k(z)$$

$$\vdots$$

$$S_n(z) = U_1(z) + U_2(z) + \ldots + U_n(z) = \sum_{k=1}^{n} U_k(z)$$

حيث $S_n(z)$ تسمى بالمجموع الجزئي النوني، وهو ناتج عن جمع n من الحدود الأولى

للمتتابعة $\{U_n(z)\}$.

المتسلسلات اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ والزوج المرتب $\left(\{U_n(z)\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n(z)\}_{n=1}^{\infty}\right)$ حيث $\{U_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ متتابعة من الدوال $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k(z)$، U_n تسمى بالحد النوني للمتسلسلة، و $S_n(z)$ يسمى بالمجموع النوني للمتتابعة. إذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$ فإنه يقال أن المتسلسلة تقاربية وأن $S(z)$ هو مجموعها، وفيما عدا ذلك فإن المتسلسلة تكون تباعدية.

الشرط الضروري لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ هو $\lim_{n\to\infty} U_n(z) = 0$، ولكن هذا الشرط ليس كافياً (كما نعلم في حالة متسلسلات الدوال الحقيقية).

إذا كانت المتسلسلة تقاربية لجميع قيم z (نقاط) في منطقة ما R، فإننا نقول أن R منطقة التقارب للمتسلسلة.

<u>تعريف: النقاط الشاذة:</u>

تسمى النقطة التي عندها $f(z)$ غير تحليلية بنقطة شاذة للدالة $f(z)$.

ويمكن تقسيم النقاط الشاذة إلى نوعين:

١- نقاط شاذة غير معزولة.

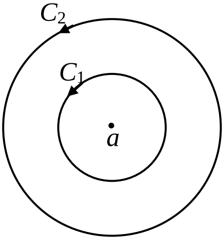
٢- نقاط شاذة معزولة.

تسمى النقطة z_0 شاذة معزولة إذا وإذا فقط وجد جوار للنقطة z_0 لا يحتوي على نقاط شاذة غير z_0.

بند (٣): نظرية تيلور:

إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل دائرة ما C مركزها عند a فإن:

$$f(z) = f(a) + f'(z)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots$$



لجميع قيم z داخل C.

البرهان:

لتكن z أي نقطة داخل C. أنشئ دائرة C_1 مركزها عند a وتحيط بالنقطة z. نحصل من صيغة كوشي للتكامل على

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w-z}dw$$

ولكن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}$$
$$=\frac{1}{(w-a)}\left\{\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right\}$$
$$=\frac{1}{w-a}\left\{1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right\}$$

أو

$$\frac{1}{w-z}=\left\{\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{w-z}\right\} \tag{2}$$

وبضرب كلاً من طرفي المعادلة (2) في $f(w)$ وباستخدام (1) يكون

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)}dw+\frac{(z-a)}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\ldots$$

$$+\frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}dw+U_n \qquad (3)$$

حيث

$$U_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw$$

باستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f^{n}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

فإن (3) تصبح

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+U_n$$

إذا أمكن أن نثبت الآن أن $\lim_{n\to\infty}U_n=0$ ، فإننا نكون قد برهنا النتيجة المطلوبة، وللقيام بذلك نلاحظ

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right|=\gamma<1$$

حيث γ ثابت ما، لأن w تقع على C_1. وأيضاً لدينا $|f(w)|<M$ ، M ثابت ما.

$$|w-z|=|(w-a)-(z-a)|\ge r_1-|z-a|$$

حيث r_1 هو نصف قطر C_1.إذن يكون لدينا

$$|U_n|=\frac{1}{2\pi i}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\gamma^n M}{r_1-|z-a|}.2\pi r_1$$

$$=\frac{\gamma^n M r_1}{r_1-|z-a|}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$$

ونرى أن $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ وهنا يتم البرهان.

مثال (٢):

ليكن $f(z) = \ln(1+z)$ حيث اعتبرنا التفرع الذي له القيمة صفر عندما $z = 0$.

(أ) فك $f(z)$ على صورة متسلسلة تيلور حول $z = 0$.

(ب) حدد منطقة التقارب للمتسلسلة في (أ).

(ج) فك $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ على صورة متسلسلة تيلور حول $z = 0$.

الحل:

(أ)

$$
\begin{aligned}
&f(z) = \ln(1+z), && f(0) = 0\\
&f'(z) = (1+z)^{-1}, && f'(0) = 1\\
&f''(z) = -(1+z)^{-2}, && f''(0) = -1\\
&f'''(z) = (-1)(-2)(1+z)^{-3}, && f'''(0) = 2!\\
&\vdots &&\\
&f^{(n+1)}(z) = n!(1+z)^{-(n+1)}, && f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!
\end{aligned}
$$

$$f(z) = \ln(1+z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \ldots$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

طريقة أخرى:

إذا كان $|z| < 1$ فإن

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

وبالتكامل من صفر إلى z ينتج أن:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$$

(ب) الحد النوني هو $U_n=\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$ وباستخدام اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nz}{n+1}\right|=|z|.$$

وبالتالي فالمتسلسلة تقاربية لكل $|z| < 1$. يمكن إثبات أن المتسلسلة تقاربية لكل $|z| = 1$ ما عدا $z = -1$.

نتج النتيجة المطلوبة أيضاً من حقيقة أن المتسلسلة تقاربية داخل دائرة تمتد إلى أقرب نقطة شاذة أي $(z = -1)$ للدالة $f(z)$.

(ج) من الجزء (أ)، بإحلال $-z$ بدلاً من z يكون لدينا

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$$

$$\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\ldots$$

المتسلسلتان تقاربيتان لكل $|z| < 1$، بالطرح نحصل على:

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

والتي تتقارب لكل $|z| < 1$. يمكن أيضاً إثبات أن المتسلسلة تقاربية لكل $|z| = 1$ ما عدا $z = 1$.

مثال:

(أ) فك $\sin z$ في متسلسلة تيلور حول $z=\frac{\pi}{4}$.

(ب) حدد منطقة التقارب للمتسلسلة.

الحل:

$$f(z)=\sin z\,,\qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(z)=\cos z\,,\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(z)=-\sin z\,,\qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

وبالتالي، بما أن $a=\frac{\pi}{4}$ فإن:

$$\begin{aligned}
f(z)&=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\dots\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2.2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2.3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\dots\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\dots\right\}.
\end{aligned}$$

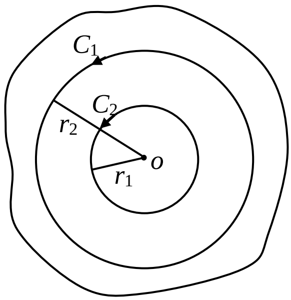
طريقة أخرى:

ليكن $u=z-\frac{\pi}{4}$ أو $z=u+\frac{\pi}{4}$ فيكون لدينا

$$\begin{aligned}
\sin z&=\sin\left(u+\frac{\pi}{4}\right)=\sin u\cos\frac{\pi}{4}+\cos u\sin\frac{\pi}{4}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\{\sin u+\cos u\}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\dots\right)\left(1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\dots\right)\right\}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2-\dots\right\}
\end{aligned}$$

(ب) بما أن النقطة الشاذة للدالة $\sin z$ التي هي أقرب ما يمكن إلى $\frac{\pi}{4}$ تكون عند اللانهاية، فإن المتسلسلة تكون تقاربية لجميع قيم z المحدودة، أي لكل z تحقق $|z| < \infty$ ويمكن إثبات هذا باختبار النسبة.

بند (٤): نظرية لورانت:



إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل وعلى حد المنطقة الحلقية الممدودة بدائرتين متحدتي المركز C_2, C_1 ومركزيهما عند a ونصف قطريهما r_2, r_1 $(r_1 > r_2)$ على الترتيب، فيكون لجميع z في R:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

حيث:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{-n+1}}, \qquad n=1,2,\ldots$$

مثال:

أوجد متسلسلة لورانت حول النقطة الشاذة المثبتة لكل من الدوال التالية ثم عين نوع النقطة الشاذة في كل حالة ومنطقة التقارب لكل متسلسلة.

(أ) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad z=1$ (ب) $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}, \quad z=2$

(ج) $\frac{z-\sin z}{z^3}, \quad z=0$ (د) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, \quad z=-2$

(هـ) $z=3$ ، $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$

<u>الحل:</u>

(أ) $z=1$ ، $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

ليكن $z-1=u$ فيكون $z=1+u$

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^{2+2u}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}.e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}\left\{1+2u+\frac{(2u)^3}{2!}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+4e^2+\ldots$$

$z=1$ قطب

المتسلسلة تقاربية لجميع قيم $z\neq 1$.

(ب) $z=2$ ، $(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$

ليكن $z+2=u$ أو $z=u-2$ فيكون

$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2}=(u-5)\sin\frac{1}{u}=(u-5)\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^5}+\ldots\right\}$$

$$=1-\frac{5}{u}-\frac{1}{3!u^2}+\frac{5}{3!u^3}+\ldots$$

$$=1-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{6(z+2)^2}+\frac{5}{6(z+2)^3}+\ldots$$

$z=-2$ نقطة شاذة أساسية.

المتسلسلة تقاربية لجميع قيم $z\neq -2$.

(ج) $z=0$ $\qquad \dfrac{z-\sin z}{z^3},$

$$\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left\{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\dots\right\}=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\dots$$

$z = 0$ نقطة شاذة قابلة للرفع.

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية لجميع قيم z.

(د) $z=-2$ $\qquad \dfrac{z}{(z+1)(z+2)},$

ليكن $z + 2 = u$ فيكون:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{u-2}{u}\cdot\frac{1}{1-u}=\frac{2-u}{u}\left(1+u+u^2+u^3+\dots\right)$$
$$=\frac{2}{u}+1+u+u^2+\dots$$
$$=\frac{2}{z+2}+1+(z+2)+(z+2)^2+\dots$$

$z = -2$ قطب من الرتبة الأولى أو قطب بسيط.

المتسلسلة تقارية لجميع قيم z بحيث أن $0 < |z + 2| < 1$.

(هـ) $z=3$ $\qquad \dfrac{1}{z^2(z-3)^2},$

ليكن $z - 3 = u$. من نظرية ذات الحدين نحصل على

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2}=\frac{1}{u^2(u+3)^2}=\frac{1}{9u^2\left(1+\frac{u}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9u^2}\left\{1+(-2)\left(\frac{u}{3}\right)+\frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2+\frac{(-2)(-3)(-u)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{9u^2}-\frac{2}{27u}+\frac{1}{27}-\frac{4}{243}u+\ldots$$

$$=\frac{1}{9(z-3)^2}-\frac{2}{27(z-3)}+\frac{1}{27}$$

$z = 3$ قطب من الرتبة الثانية.

المتسلسلة تقاربية لجميع قيم z بحيث $0 < |z - 3\} < 3$.

<u>مثال (٥):</u>

فك الدالة $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ في صورة متسلسلة لورانت محققة في (أ)

(أ) $1 < |z| < 3$ (ب) $|z| > 3$

(ج) $1 < |z + 1| < 2$ (د) $|z| < 1$

(أ) بالتحليل إلى كسور جزئية:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+3}$$

إذا كان $|z| > 1$ فإن

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{6\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\ldots\right)$$

وبالتالي فإن مفكوك لورانت المطلوب صحيح لكل من $|z| > 1$, $|z| < 3$.

$$\frac{1}{2(z+1)}=\frac{1}{2z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z^{2}}+\frac{1}{2z^{3}}-\dots$$

إذا كان $|z|>3$ فإن:

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{2z\left(1+\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{2z}-\frac{3}{2z^{2}}+\frac{9}{2z^{3}}-\dots$$

وبالتالي فإن مفكوك لورانت المطلوب الصحيح لكل من $|z|>3, |z|>1$ ينتج المطلوب وهو

$$f(z)=\frac{1}{z^{2}}-\frac{4}{z^{3}}+\frac{13}{z^{4}}+\frac{40}{z^{5}}+\dots$$

(ج) ليكن $z+1=u$ فيكون:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{u(u+2)}=\frac{1}{2u\left(1+\frac{u}{2}\right)}=\frac{1}{2u}\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^{2}}{4}-\frac{u^{3}}{8}+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(z+1)-\frac{1}{16}(z+1)^{2}+\dots$$

صحيحاً لـ $u\neq 0$، $0<|z+1|<2, |u|<2$.

(د) إذا كان $|z|<1$ فإن:

$$\frac{1}{2(z+1)}=\frac{1}{2(1+z)}=\frac{1}{2}\left(1-z+z^{2}-z^{3}+\dots\right)=\frac{1}{2}-\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{2}-\dots$$

إذا كان $|z|<3$ نجد من الجزء (أ)

$$\frac{1}{2(z+3)}=\frac{1}{6}-\frac{z}{17}+\frac{z^{2}}{34}-\frac{z^{3}}{162}+\dots$$

وبالتالي فإن مفكوك لورانت المطلوب الصحيح لكل من $|z|<3, |z|<1$ أي $|z|<1$ ينتج بالطرح وهو

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{16}z^{2}-\frac{40}{8!}z^{3}+\ldots$$

وهذه هي متسلسلة تيلور.

ملحوظة هامة:

في برهان نظرية لورانت يمكننا أن نبدل الدائرتين C_2, C_1 بأي دائرة متحدة المركز معها وتقع بين C_2, C_1. في هذه الحالة فإن المعاملات a_{-n}, a_n في المفكوك يمكن كتابتها في صيغة واحدة.

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)dw}{(w-a)^{n+1}}, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad \text{(I)}$$

(٢) وكما نعلم أن مفكوك لورانت للدالة $f(z)$ على الصورة

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \qquad \text{(II)}$$

الجزء $a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ يسمى بالجزء التحليلي لسلسلة لورانت. بينما باقي المتسلسلة يتكون من الأسس السالبة للمقدار $z-a$ وهو $\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n}$ يسمى بالجزء الرئيسي. إذا كان الجزء الرئيسي يساوي صفراً فإن متسلسلة لورانت تؤول إلى متسلسلة لورانت.

بند (٥): تقسيم النقاط الشاذة:

من الممكن تقسيم النقاط الشاذة للدالة $f(z)$ وذلك بفحص متسلسلة لورانت للدالة. ولهذا الغرض نفرض أن في شكل (١-٦) $r_2=0$ بحيث أن $f(z)$ تحليلية على المنحنى C_1 وداخله ما عدا عند النقطة $z=a$ والتي هي نقطة شاذة معزولة. سنفرض فيما يلي أن النقاط الشاذة معزولة ما لم ينص على غير ذلك.

١ – الأقطاب:

إذا كانت $f(z)$ لها الصورة (II) والتي فيها الجزء الرئيسي له فقط عدد محدود من الحدود ويعطى بالآتي:

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

حيث $a_{-n} \neq 0$ فإن $z = a$ يسمى قطباً من الرتبة n. إذا كانت $n = 1$ فإن a يسمى قطباً بسيطاً.

إذا كانت للدالة $f(z)$ قطباً عند $z = a$ فإن $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

٢ – النقاط الشاذة القابلة للرفع (الإزالة):

إذا كانت $f(z)$ دالة وحيدة القيمة وغير معزولة عند $z = a$ ولكن $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ موجودة، فإن $z = a$ تسمى نقطة شاذة قابلة للرفع، وفي هذه الحالة ينعدم الجزء الرئيسي.

مثال:

إذا كان $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ فتكون $z = 0$ نقطة شاذة قابلة للرفع لأن $f(0)$ غير معرفة ولكن $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$ تعرف $f(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$ لاحظ في هذه الحالة أن

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left\{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots\right\}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\ldots$$

٣ – نقاط شاذة أساسية:

إذا كانت $f(z)$ وحيدة القيمة فتسمى أي نقطة شاذة والتي ليست قطباً لأو نقطة شاذة قابلة للرفع بنقطة شاذة أساسية. إذا كانت $z = a$ نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ فإن الجزء الرئيسي لمفكوك لورانت يكون له عدد لا نهائي من الحدود.

مثال:

بما أن $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^{2}}+\frac{1}{3!z^{3}}+...$ فتكون $z = 0$ نقطة شاذة أساسية.

٤ – نقاط التفرع:

تسمى نقطة ما $z = z_0$ بأنها نقطة تفرع للدالة متعددة القيم $f(z)$ إذا كانت تفرعات $f(z)$ تتلاقى عند z_0.

بما أن كلاً من تفرعات دالة متعددة القيم يكون تحليلياً، فإن جميع النظريات للدوال التحليلية يمكن تطبيقها، وعلى وجه الخصوص نظرية تيلور.

مثال:

تفرع الدالة $f(z)=z^{\frac{1}{2}}$ الذي له القيمة 1 عندما $z = 1$، له متسلسلة تيلور على الصورة $a_0+a_1(z-1)+a_2(z-1)^2+...$ ونصف قطر التقارب $R= 1$. المسافة من $z = 1$ إلى أقرب نقطة شاذة، أي نقطة التفرع $z = 0$.

النقاط الشاذة عند اللانهاية:

بوضع $z=\frac{1}{w}$ في $f(z)$ فنحصل على الدالة $f\left(\frac{1}{w}\right)=f(w)$. إذن فنوع النقطة الشاذة عند $z = \infty$ (النقطة عند اللانهاية) يعرف بأن نفس نوع النقطة الشاذة للدالة $f(w)$ عند $w = 0$.

مثال:

الدالة $f(z)=z^{3}$ لها قطب من النقطة الثالثة $z = \infty$ لأن $f(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w^{3}}$ لها قطب من النقطة الثالثة عند $w = 0$.

بالمثل $f(z)=e^{z}$ لها نقطة شاذة أساسية عند $z = \infty$ لن $f(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ لها نقطة شاذة أساسية عند $w = 0$.

بند (٦): الدوال الشاملة الميرومورفية:

تسمى الدوال التي تكون تحليلية عند أي نقطة في المسوى المحدود (أي عند أي نقطة ما عدا ∞) بالدالة الشاملة.

الدوال $e^z, \sin z, \cos z$ هي دوال شاملة يمكن تمثيل الدالة بمتسلسلة تيلور التي نصف قطرها لا نهائي، وعلى العكس إذا كانت متسلسلة قوى لها نصف قطر تقارب لا نهائي، فإنها تمثل دالة شاملة. وتسمى الدالة التي تكون تحليلية عند أي نقطة في المستوى المحدود ما عدا عدد محدود من الأقطاب بالدالة الميرومورفية.

مثال:

الدالة $\dfrac{z}{(z-1)(z+3)^2}$ تحليلية عند أي نقطة في المستوى المحدود ما عدا عند القطبين $z = 1$ (قطب بسيط)، $z = -3$ (قطب من الرتبة الثانية) هي دالة ميرومورفية.