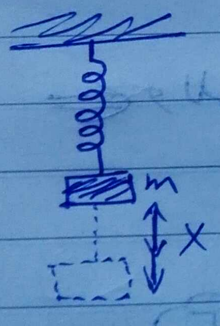
«Simple harmonic oscillator»

س١ عرف الحركة التوافقية البسيطة ؟!

هي اهتزازة دورية (أو جيبية) حول نقطة اتزانه بسعة ثابتة وتردد ثابت لا يعتمد على السعة.

س٢ قم بوصف المتذبذب التوافقي البسيط من وجهة نظر الفيزياء الكلاسيكية ثم استنتج شكل طاقة الوضع له؟!

للإجابة تخيل مثلاً أنه لدينا كتلة معلقة في زنبرك كما بالشكل المقابل



- ثم تم ازاحة الكتلة من موضع الاتزان مسافة مقدارها "x"
- سوف تتأثر هذه الكتلة بقوة إرجاعية تتناسب مع المسافة x مقدارها

$$\vec{F} \propto \vec{x}$$

$$\boxed{\vec{F} = -K\vec{x}} \longrightarrow (1)$$

⇐ ولكننا نعلم من قانون نيوتن الثاني أنه:-

$$\vec{F} = m\ddot{x} \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن

$$m\ddot{x} = -kx$$

or,
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow (3)$$

where,
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

حيث T هو الزمن الدوري للحركة .

⟸ أحد الحلول الشهيرة للمعادلة (3) هو :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \rightarrow (4)$$

⟸ وللحصول على طاقة الوضع $V(x)$ نستخدم العلاقة :

$$V(x) = -\int F\,dx$$

$$\boxed{\therefore V(x) = \frac{1}{2}kx^2} \rightarrow (5)$$

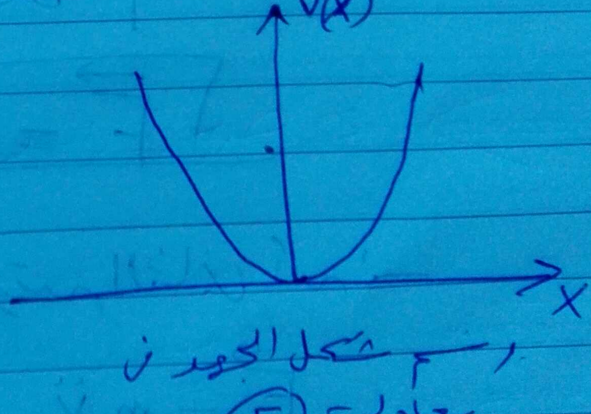
ولكن

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

or $k = m\omega^2$

إذن :

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2} \Rightarrow (6)$$



رسم شكل الجهد من معادلة (5)

س٣/ قم بحل معادلة شرودنجر في حالة المتذبذب التوافقي البسيط في بعد واحد؟!

⇐ معادلة شرودنجر الغير معتمدة على الزمن هي:-

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)\right]\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi \qquad (1)$$

⇐ لاحظ أننا عوضنا عن $V(x)$ من المعادلة رقم (6) من السؤال السابق.

ويمكن كتابة (1) كما يلي:-

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2\right]\psi = E\psi \qquad (2)$$

ولحل المعادلة (2) سنستخدم إما حل تحليلي أو حل جبري.

⇐ سوف نعرض هنا الحل الجبري ولجعل الحل واضح وسهل التتبع سنقسم الحل إلى أربعة أجزاء أو

أربع خطوات: ←

الخطوة رقم (1): ←

- يعتمد الحل الجبري بصورة أساسية على عمل تحليل للمقدار الموجود داخل الأقواس المربعة في معادلة (2)

← نحن نعلم أنه بالنسبة للأرقام يمكن كتابة

$$u^2+v^2=(u+iv)(u-iv) \Longrightarrow (3)$$

← ولكن لا يمكننا استخدام العلاقة (3) هنا لأننا نتعامل مع مؤثرات كمية (quantum operators) وهي غير إبدالية في معظم الحالات أو في كثير من الأحيان.

← وللالتفاف حول هذه المشكلة دعنا نعرف المؤثرات التالية: ←

$$a_{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\pm im\omega x\right) \Longrightarrow (4)$$

الخطوة رقم (2): ←

الآن ماهو تأثير حاصل الضرب (a_-a_+) وكيف نستخدمه في اعادة كتابة معادلة شرودنجر بصورة أبسط. لرؤية ذلك بدون أخطاء ونظراً لأننا نتعامل مع مؤثرات دعنا نستخدم دالة اختبار $f(x)$ إذن فإن: ←

$$\therefore (a_- a_+) f(x) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - im\omega x\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} + im\omega x\right) f(x)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx} - im\omega x\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{df}{dx} + im\omega x f\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[-\hbar^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \hbar m\omega \frac{d}{dx}(xf) - \hbar m\omega x \frac{df}{dx} + (m\omega x)^2 f\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2 + \hbar m\omega\right] f(x) \Longrightarrow (5)$$

$$\therefore a_- a_+ = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2\right] + \frac{1}{2}\hbar\omega \Longrightarrow (6)$$

By comparing (6) with square bracket in L.H.S of (2) we clearly see that (2) does not factor perfectly ((there is extra term $\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)$)).

$\Rightarrow$ However we can write S.E. as :$\longrightarrow$

$$\left(a_- a_+ - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi = E\psi \longrightarrow (7)$$

$\Rightarrow$ or by changing the order of a_+ & a_- we get :$\rightarrow$

$$\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi = E\psi \Longrightarrow (8)$$

Because :$\longrightarrow$

$$a_+ a_- = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2\right] - \frac{1}{2}\hbar\omega \Longrightarrow 9$$

$\Rightarrow$ From 6 & 9 :$\longrightarrow$

$$a_- a_+ - a_+ a_- = \hbar\omega$$

$$[a_-, a_+] = \hbar\omega \longrightarrow 10$$

(Commutator of a_- & a_+)

$\Rightarrow$ So. S.E. have the form 7 or 8 depending on the order of a_+ & a_-.

$\Rightarrow$ In fact a_+ & a_- are famous as Ladder operators

$\Rightarrow$ 3[rd] important step :$\longrightarrow$

If ψ satisfies the S.E. with energy E then $(a_+\psi)$ satisfies S.E. with energy $(E + \hbar\omega)$.

$\Rightarrow$ proof :$\longrightarrow$

$$\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)(a_+\psi) = \left(a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2}\hbar\omega a_+\right)\psi$$

$$= a_+\left(a_- a_+ + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi$$

$$= a_+\left[a_- a_+ - \frac{1}{2}\hbar\omega\right]\psi + a_+\hbar\omega\psi$$

$$= a_+(E\psi + \hbar\omega\psi)$$

$$= (E + \hbar\omega)(a_+\psi) \Longrightarrow 11$$

$\Rightarrow$ we can also prove that $(a_- \psi)$ is a solution of S.E with energy $(E - \hbar\omega)$:

$$(a_- a_+ - \tfrac{1}{2}\hbar\omega)(a_-\psi) = a_-(a_+ a_- - \tfrac{1}{2}\hbar\omega)\psi$$
$$= a_-\left[(a_+ a_- + \tfrac{1}{2}\hbar\omega)\psi - \hbar\omega\psi\right]$$
$$= a_-\left[\; E\psi - \hbar\omega\psi \right]$$
$$= (E - \hbar\omega)(a_-\psi) \longrightarrow (12)$$

$\Rightarrow$ For the clear reasons seen above the names of the ladder operators $a_\pm$ are :$\rightarrow$

a_+ : raising operator

a_- : Lowering operator

$\Rightarrow$ 4th step :$\rightarrow$

$\Leftarrow$ ماذا لو كررنا التأثير بـ a مراراً ؟!

what if we repeated the action of a_-, repeatedly ?!

we will reach a state with energy less than zero, which is not acceptable physically. So at some state this machine must stop. This means that there must exist some lower state ψ_0 such that :$\rightarrow$

$$a_- \psi_0 = 0 \longrightarrow (13)$$

or :→

$$\frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi_0}{dx} - im\omega x\,\psi_0\right) = 0$$

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}\,x\,\psi_0$$

$$\therefore \int \frac{d\psi_0}{\psi_0} = \frac{-m\omega}{\hbar}\int x\,dx$$

$$\ln \psi_0 = \frac{-m\omega}{2\hbar}x^2 + \text{Const}$$

So :→

$$\boxed{\psi_0(x) = A_0\, e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2}} \Longrightarrow (14)$$

Then by applying shrödinger eq.

$$\left(a_+a_- + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi_0 = E_0\,\psi_0$$

but $a_-\psi_0 = 0$

$$\therefore \tfrac{1}{2}\hbar\omega\,\psi_0 = E_0\,\psi_0$$

$$\boxed{\therefore E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega} \Longrightarrow (15)$$

problem 1

prove that :→

(I) $$\int_{-\infty}^{\infty} |a_+ \psi_n|^2 \, dx = (n+1)\hbar\omega$$

(II) $$\int_{-\infty}^{\infty} |a_- \psi_n|^2 \, dx = n\hbar\omega$$

& then show that from these results it follows :→

$$\left.\begin{aligned} a_+ \psi_n &= \sqrt{(n+1)\hbar\omega} \; \psi_{n+1} \\ a_- \psi_n &= \sqrt{n\hbar\omega} \; \psi_{n-1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \star$$

(III) using resut $\star$ determin the normalization const A_n in eq. 16.

Hint : Normalize ψ_0 by hand & then continue for other states to reach :→

$$A_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{(-i)^n}{\sqrt{n!\,(\hbar\omega)^n}}$$

Then ~~the~~ we clearly see that E_0 is the ground state, & to get higher excited states we simply apply the raising operator :⟶

$$\boxed{\therefore \quad \psi_n = A_n \left(a_+\right)^n e^{\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2} \qquad \text{with,} \quad E_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega} \Longrightarrow (16)$$