بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الدوال الخاصة

كلية التربية – الفرقة الثالثة – شعبة الرياضيات

المحاضرة السابعة والثامنة

دالة لاجندر

د. هدي حمدان مرداش

2020

Legendre's Functions

دالة لاجندر تحل المعادلة التفاضلية وهي

$$(1-x^2)\ \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\ \frac{dy}{dx} + n(n+1)\ y = 0 \qquad (1)$$

لحل معادلة لاجندر نفرض

$$y = \ \sum_{r=0}^{\infty} a_r\ x^{k-r}$$

بالتفاضل بالنسبة ل x مرتين والتعويض في معادلة لاجندر ثم مقارنة الحدود نحصل علي

دالة لاجندر من النوع الأول

$$P_n(x) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right)$$

دالة لاجندر من النوع الثاني

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left(x^{-n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}x^{n-5} - \ldots\right)$$

Rodrigue's Formla

صيغة رودريجوس

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

هي صيغة لدالة لاجندر وهي الصيغة الأشهر والأكثر أستخداماَ (تحفظ)

يمكن بسهولة أثبات أنها تحقق معادلة لاجندر.

الاثبات : (للقراءة والفهم فقط)

ملحوظة: سوف يتم التعامل مع النوع الأول للجندر من خلال صيغة رودريجوس. كما أنه سيتم التعامل مع النوع الأول فقط.

نبدأ نركز

To find $P_n, n = 0, 1, 2, \dots .$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dx^1}(x^2-1)^1 = \frac{1}{2}(2x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{8}\frac{dy}{dx}(4x^3 - 4x) = \frac{1}{8}(12x^2 - 4) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

وهكذا يمكن حساب $P_3, P_4, P_5, \ldots\ldots$

ويمكن أيضاً حساب حدود كثيرات الحدود من $P_3, P_4, P_5, \ldots\ldots$ كالأتي:

$$1 = P_0,\ \ x = P_1,$$

$$x^2 = \frac{2P_2+P_0}{3};\ P_2 = \frac{3\,x^2 - P_0}{3}$$

n	P_n	x^n
0	1	P_0
1	x	P_1
2	$\frac{1}{2}(3x^2\ -1)$	$\frac{2P_2+P_0}{3}$
3	$\frac{1}{2}x(5x^2\ -3)$	$\frac{2P_2+P_0}{3}$
4	$\frac{1}{8}(35\,x^4\ -30x^2+3)$	$\frac{8P_4+20P_2+7P_0}{35}$

الجدول للتوضيح وليس للحفظ يمكن أستنتاج أي قيمة بداخله

Generation Function

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n$$

مهمة جداً لابد أن تحفظ والاثبات سهل جداً (للقراءة والفهم).

لاحظ أن دالة لاجندر دالة في متغير واحد هو x
أما الدالة المؤلدة فهي دالة في متغريين (x, z)

Recurrence Relations: (العلاقات التكرارية)

(مهمة مطلوبة بالاثبات).

1. $(2n+1)x\,P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$
2. $x\,P'_n - P'_{n-1} = nP_n$
3. $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$
4. $(n+1)P_n = P'_{n+1} - x\,P'_n$
5. $\left(1 - x^2\right) P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$
6. $\left(1 - x^2\right) P'_n = (n+1)(xP_n - P_{n+1})$

1. $(2n+1)x P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$

Proof

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty z^n P_n \quad (*)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة ل z

$$\frac{-1}{2}(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x+2z) = \sum_0^\infty n z^{n-1} P_n$$

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_0^\infty n z^{n-1} P_n$$

بضرب الطرفين في $(1-2xz+z^2)$

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty n (1-2xz+z^2) z^{n-1} P_n$$

By (*)

$$(x-z)\sum_0^\infty z^n P_n = \sum_0^\infty (nP_n z^{n-1} - 2xnP_n z^n + n P_n z^{n+1}$$

بمقارنة معاملات z^n للطرفين نحصل علي

$$(2n+1)x P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

لاحظ أن للحصول علي معامل z^n من معامل z^{n-1} نعوض عن n ب n+1

أن للحصول علي معامل z^n من معامل z^{n+1} نعوض عن n ب n-1

$2.\ x P'_n - P'_{n-1} = nP_n$

نفس خطوات (1) مع االتفاضل بالنسبة ل x.

$3. (2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$

Proof

By (1) $\quad \mathbf{(2n+1)x\, P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}}$

نفاضل بالنسبة ل x (تذكر أن P_n دالة في x)

$$\mathbf{(2n+1)\, P_n + (2n+1)\, x\ \ P'_n = (n+1)P'_{n+1} + nP'_{n-1}}$$

By (2) $\mathbf{(2n+1)\, P_n + (2n+1)\, (nP_n + P'_{n-1}) = (n+1)P'_{n+1} + nP'_{n-1}}$

بالاختصار نحصل علي

$$(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$$

4. $(n+1)P_n = P'_{n+1} - x P'_n$

Proof

By (3) $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$

By(2) $(2n+1)P_n = P'_{n+1} - (x P'_n - nP_n)$

Then $(n+1)P_n = P'_{n+1} - x P'_n$

5. $\left(1 - x^2\right) P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$

Proof

By (4) $(n+1)P_n = P'_{n+1} - x P'_n$

باستبدال n ب (n-1) نحصل علي

$nP_{n-1} = P'_n - x P'_{n-1}$ (*)

By (2) $x P'_n - P'_{n-1} = nP_n$

بالضرب في x نحصل علي

$x^2 P'_n - x P'_{n-1} = n\, xP_n$ (**)

بالتعويض من (**) في (*) نحصل علي $\left(1 - x^2\right) P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$

$$6. \left(1 - x^2\right) P'_n = (n+1)(xP_n - P_{n+1})$$

Proof

By (1) $(2n+1)x\,P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$

$$(n+1)x\,P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1} - nxP_n$$

$$(n+1)(x\,P_n - P_{n+1}) = n\,(P_{n-1} - xP_n)$$

By (5) $(n+1)(x\,P_n - P_{n+1}) = \left(1 - x^2\right) P'_n$

Orthogonally of $P_n(x)$

التعامد لدالة لاجندر

$$\int_{-1}^{1} P_m P_n \, dx = 0 \qquad if\ n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} P_m P_n \, dx = \frac{2}{2n+1} \quad if\ n = m$$

التعامد مهم جدا بدون أثبات

Example:

$\int_{-1}^{1} P_2 P_3 \, dx = 0,$ $\qquad$ $\int_{-1}^{1} P_3 P_3 \, dx = \frac{2}{2.3+1} = \frac{2}{7}$

مطلوب الأمثلة المحلوله فقط
واي أسئلة ممكن نتناقش فيها ع جروب الواتساب

كن متفائلاً.
ودمتم سالمين

شكراً لكم
مع أمنياتي بالنجاح والتوفيق