- اولا التوزيع الأسي (Exponential distribution):

نشأ التوزيع الأسى من تعريف متغير عشوائي X يمثل زمن الانتظار المطلوب للحصول على أول مشاهدة لنوع معين عندما يكون ظهور الحادثة بصورة عشوائية و بمعدل متوسط λ حادثة في وحدة الزمن.

يقال أن المتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الاحتمالي الأسى إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية على الصورة :

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\ \lambda>0\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$$

وتسمى $f_X(x)$ بدالة الكثافة الآسية ذات البارامتر λ.

- دالة التوزيع التراكمية

$$F_X(x)=\Pr(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

خاصية نقص الذاكرة للتوزيع الأسى (Forgetfulness property) :

المتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الاحتمالي الأسى إذا كان و فقط حقق الخاصية:

$$\Pr(X\leq s+1 | X>t)=\Pr(X\leq s) \quad \text{او} \quad \Pr(X>s+1 | X>t)=\Pr(X>s)$$

الإثبات: نفرض أن X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الأسى وله دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ ودالة التوزيع التراكمية $F_X(x)$ حيث :

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0 \quad \text{و} \quad F_X(x)=1-e^{-\lambda x},\ x\geq 0$$

$$\therefore \Pr(X\leq s+t \mid X>t)=\frac{\Pr(X\leq s+t, X>t)}{\Pr(X>t)}=\frac{\Pr(t<X\leq s+t)}{\Pr(X>t)}$$

$$= \frac{\int_t^{s+t} f_X(x)\,dx}{\int_t^{\infty} f_X(x)\,dx} = \frac{\int_t^{s+t} \lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx} = \frac{e^{-\lambda(s+t)} + e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = F_X(x) = \Pr(X \le s)$$

أيضاً يمكننا إثبات أن

$$\Pr(X > s+t \mid X > t) = \frac{\Pr(X > s+t, X > t)}{\Pr(X > t)} = \frac{\Pr(X > s+t)}{\Pr(X > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \Pr(X > s)$$

وذلك لأن : $\Pr(X > x) = 1 - \Pr(X \le x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}$

إثبات العكس: نفرض أن X متغير عشوائي يحقق الخاصية المذكورة أى ان

$$\Pr(X > s+t \mid X > t) = \frac{\Pr(X > s+t)}{\Pr(X > t)} = \Pr(X > s)$$

أو $\Pr(X > s+t) = \Pr(X > s)\Pr(X > t)$

أي أن $\Pr(X > x)$ تحقق المعادلة الأساسية: $g(s+t) = g(s)g(t)$

إذن $g\left(\frac{2}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = g^2\left(\frac{1}{n}\right)$

ويكون $g\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = g^m\left(\frac{1}{n}\right)$

أيضاً: $g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = g^n\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow g(1) = g^2\left(\frac{1}{2}\right) \ge 0$

أو بأخذ الجذر النوني للطرفين نحصل على: $\left(g(1)\right)^{1/n} = g\left(\frac{1}{n}\right)$

وعموماً يكون: $\left(g(1)\right)^{m/n} = g\left(\frac{m}{n}\right)$

أو $\left(g(1)\right)^{x} = g(x) \Rightarrow \; g(x) = e^{-(-\log g(1))x} = e^{-\lambda x}$

حيث $\lambda = -\log g(1)$ أي أن: $\Pr(X > x) = e^{-\lambda x}$ أو $F_X(x) = \Pr(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$

وهذا يوضح أن X يخضع للتوزيع الأسى.

هذه الخاصية تسمى بخاصية نقص الذاكرة و تعرف بــ

خاصية ماركوف (Markov Property) التي تلعب دوراً مهم في نظرية العمليات العشوائية (Theory of Stochastic Processes)

<u>انظر كتاب مقدمة في نظرية الاحتمالات</u> من صفحة 224 الى صفحة 228

<u>التوزيع الأسي</u>: اثبات ان $f_X(x)$ دالة كثافه احتمالية، اوجد التوقع الرياضى والتباين باستخدام دالة التوزيع التراكمية، العزوم الخام ومنها اوجد المتوسط والتباين، الدالة المولدة للعزوم ومنها اوجد العزوم .

- <u>ثانيا التوزيع الطبيعي (Normal Distribution) :</u>
- <u>أهمية التوزيع الطبيعى:</u>

التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وأكثرها استخداماً وتأتي أهميته من الناحيتين النظرية والتطبيقية إذ يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأطوال – الأوزان – الأعمار – درجات الحرارة – الدخول الشهرية - ... فضلاً عن أنه يلعب دوراً كبيراً في بناء نظرية الاحتمال والنظرية الإحصائية.
وقد سمي هذا التوزيع بالتوزيع الطبيعي (المعتدل أو المعتاد) كما يسمى التوزيع بتوزيع

جاوس (Gauss distribution) اعترافاً بفضل العالم الألماني كارل فردريك جاوس (1777 – 1855) الذي استنبط التوزيع رياضياً كتوزيع احتمال أخطاء القياس و كان لذلك يسميه بالقانون الطبيعي للأخطاء (Normal law of error) و أيضاً يسمى بتوزيع جاوس – لابلاس (Laplace – Gauss distribution) اعترافاً بجميل العالم الفرنسي بيير سيمون لابلاس (1749 – 1827) الذي كان أول من اكتشفه و أثبت صلا حيته كنموذج لكثير من الظواهر.

- جميع التوزيعات الإحتمالية مثل توزيع ذات الحدين وتوزيع بواسون وغيرها من التوزيعات تؤل إلى التوزيع الطبيعى عندما يكون فضاء العينة كبير جدا.
- يصف معظم الظواهر الطبيعية.

إذا تم أخذ مجموعة من الطلاب وقمنا بقياس أطوالهم أو مستوى ذكائهم ورسمنا المنحنى التكرارى النسبى للأطوال أو مستوى الذكاء لوجدنا أنه بزيادة عدد الطلاب فى المجموعة فإن المنحنى يؤل إلى منحنى متماثل حول محور يمر بالوسط الحسابى للمجموعة المختارة، هذا المنحنى المناظر لدالة كثافة لها التوزيع الطبيعى.

<u>تعريف (التوزيع الطبيعى)</u>

يقال أن المتغير العشوائى المتصل X له توزيع طبيعى إذا كانت دالة كثافته لها الصورة

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

وهى دالة منحنى لها شكل الجرس متماثلة حول المحور $X=\mu$ حيث:

π عدد ثابت يساوى تقريبا 3.1416 ، e عدد ثابت يساوى تقريبا 2.7183

μ هى القيمة المتوقعة لـ X يمكن أن يكون أى عدد حقيقى $E[X]=\mu$

σ^2 هو التباين لـ X ويمكن أن يكون أى عدد حقيقى موجب $Var(X)=\sigma^2$.

- هذه الدالة تحدد تماما متى علمت البارامترات μ و σ
- نقول أن X له توزيع طبيعى بتوقع μ وتباين σ^2 وتكتب باختصار

$$X \sim N\left(x;\mu,\sigma^2\right).$$

⦿<u>خصائص التوزيع الطبيعى</u>

- المنحنى متماثل حول الخط المستقيم $X=\mu$
- المحور X هو خط تقاربى للمنحنى الطبيعى
- المنوال والوسيط والوسط الحسابى تساوى μ والتباين يساوى σ^2
- نقط انقلاب المنحنى هى : $X=\mu-\sigma$ و $X=\mu+\sigma$
- المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعى تساوى الواحد الصحيح
- <u>نسبة المساحة بين</u>
- $X=\mu+\sigma,\ X=\mu-\sigma$ هى 68.27%
- $X=\mu+2\sigma,\ X=\mu-2\sigma$ هى 95.5%
- $X=\mu+3\sigma,\ X=\mu-3\sigma$ هى 99.7%

<u>ملاحظة :</u> يمكن حساب احتمال وقوع X في أي فترة نريدها وذلك بإيجاد قيمة تكامل دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ في هذه الفترة، أي إيجاد المساحة المحصورة تحت منحنى هذه الدالة داخل هذه الفترة. بما أن الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ يحددان التوزيع الطبيعي تحديد تام فإن المساحة التي على أي فترة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تعتمد على μ و σ وبالتالي لا يمكن وضع جداول لجميع قيم μ و σ ولتسهيل حساب المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي فإننا لا بد و أن نتعرض للتوزيع الطبيعي القياسي.

- <u>نحتاج لحساب التكامل الآتى:</u>

$$\Pr\left(a<X<b\right)=\int_a^b f_X\left(x\right)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

وهو تكامل يصعب حسابه بالطرق العادية ويلزم حسابه فى كل مرة عند حساب احتمال معين ولذلك وتجنبا لتكرار المجهود يتم عمل تحويل المنحنى المتماثل حول $X=\mu$ إلى منحنى متماثل حول $Z=0$.

- <u>التوزيع الطبيعي القياسي "المعيارى" (Standard Normal Distribution) :</u>

يقال أن المتغير العشوائى Z له توزيع طبيعى إذا كانت دالة الكثافة له هى :

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2},\ -\infty<z<\infty,$$

$$\Phi_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

وتكتب باختصار $Z\sim N(z;0,1)$.

⦿ <u>بعض خصائص التوزيع الطبيعى المعيارى:</u>

- الدالة $f_Z(z)\geq 0$ لجميع قيم z
- الدالة $f_Z(z)$ دالة زوجية فى z
- الدالة $f_Z(z)$ لها قيمة عظمى عند القيمة $z=0$ أى أن $E[Z]=0$ وتباين Z هو الواحد الصحيح $Var(Z)=1$

<u>**نظرية** (1).</u> إذا كان $X\sim N(x;\mu,\sigma^2)$ فإن $Z\sim N(z;0,1)$ حيث $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

الإثبات : من تعريف دالة التوزيع التجميعية (التراكمية) للمتغير العشوائي Z:

$$F_Z(z)=\Pr(Z\leq z)=\Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq z\right)=\Pr(X\leq\sigma z+\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\sigma z+\mu}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx.$$

بالتعويض عن $y=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$, $dy=\dfrac{dx}{\sigma}$ نحصل على:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy\equiv\Phi(z)$$

وتكون دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Z هي :

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2},\ -\infty<z<\infty\quad \Rightarrow Z\sim N(z;0,1)$$

من التماثل نجد أن: $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$.

وعلى ذلك يمكن حساب الاحتمال $\Pr(x_1\le X\le x_2)$ كما يلي :

$$\Pr(x_1\le X\le x_2)=\Pr\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Pr\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)=\Pr\left(Z\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Pr\left(Z\le\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{x_x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy-\int_{-\infty}^{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}dy=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

وهذا الاحتمال الأخير يمكن الحصول عليه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

<u>مثال (1)</u>. إذا كانت لدينا مجموعة من درجات الحرارة خلال شهر مارس هى 30, 33, 35, 40, 42 وإذا علم أن درجات الحرارة خلال هذا الشهر لها توزيع طبيعى بتوقع رياضى مقداره 35 وانحراف معيارى 2.

أوجد القيم المعيارية (القياسية) لدرجات الحرارة المعطاة.

الحــل: نفرض أن X يمثل درجات الحرارة خلال شهر مارس، $\mu=35$ و $\sigma=2$:

القيم المعيارية (القياسية) لدرجات الحرارة المعطاة هى $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-35}{2}$

$$X=30\Rightarrow Z=\frac{30-35}{2}=-2.5,\qquad X=33\Rightarrow Z=\frac{33-35}{2}=-1,$$

$$X=35\Rightarrow Z=\frac{35-35}{2}=0,\qquad X=40\Rightarrow Z=\frac{40-35}{2}=2.5,$$

$$X = 42 \Rightarrow Z = \frac{42-35}{2} = 3.5.$$

مثال (2). إذا كانت درجات حاصل الذكاء تتوزع طبيعيا بمتوسط يساوى 100 وانحراف معيارى يساوى 15، فما نسبة الناس ذوى درجة الذكاء:

أ- فوق 0.125 ب- تحت 0.80 جـ- بين 70 و 130 .

لنفرض أن الحكومة تقدم تعليما خاصا للخمسة في المائة الأدنى فى حاصل ذكائهم. وتقدم تعليما جامعيا للسبعة في المائة الأعلى فى حاصل ذكائهم. أوجد القيم المعيارية المقابلة لهذه النسب ثم استنتج الحدود الفاصلة فى درجات حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاصا، ولأولئك الذين يدخلون الجامعة.

الحـل: نرمز لدرجة حاصل الذكاء بـ X فلدينا بالفرض أن $X \sim N(100,125)$

وبفرض أن $Z = \dfrac{X-10}{2}$ فإن $Z \sim N(0,1)$ والمطلوب :

أ- فوق 125

$$\Pr(X > 125) = \Pr\left(Z > \frac{125-100}{15}\right) = \Pr(Z > 1.67)$$
$$= 1 - \Pr(Z < 1.67) = 1 - \Phi_Z(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

والنسبة المطلوبة هى % 4.75

لاحظ ان

$$\Pr(Z > 1.67) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1.67}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.67} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
$$= 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475.$$

ب - تحت 80

$$\Pr(X < 80) = \Pr\left(Z < \frac{80-100}{15}\right) = \Pr(Z < -1.33) = \Pr(Z > 1.33)$$
$$= 1 - \Pr(Z < 1.33) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

والنسبة المطلوبة هى % 9.18

لاحظ ان

$$\Pr\left(Z<-1.33\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1.33}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1.33}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$=1-\Phi\left(1.33\right)=1-0.9082=0.0918.$$

جـ - بين 70 و 130

$$\Pr\left(70<X<130\right)=\Pr\left(\frac{70-100}{15}<Z<\frac{130-100}{15}\right)=\Pr\left(-2<Z<2\right)$$
$$=\Phi\left(2\right)-\Phi\left(-2\right)=\Phi\left(2\right)-\left[1-\Phi\left(2\right)\right]=2\Phi\left(2\right)-1$$
$$=2\left(0.9772\right)-1=1.9544-1=0.9544.$$

والنسبة المطلوبة هى 95.44 %

لحساب القيم المعيارية المقابلة لهذه النسب: $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow X=\mu+Z\sigma$.

نفرض أن القيمة المعيارية المقابلة لنسبة التعليم الخاص هى a والمقابلة لنسبة التعليم الجامعى هى b:

$$-a=1.645\rightarrow a=-1.645\Rightarrow X=\mu+a\sigma=100+15\left(-1.645\right)=75$$
$$b=1.475\Rightarrow X=\mu+b\sigma=100+15\left(1.475\right)=122$$

الحدود الفاصلة فى درجات حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاصا، ولأولئك الذين يدخلون الجامعة:

ويكون الحد الأعلي لدرجة حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاص، مقربا لأقرب عدد صحيح هو 75

ويكون الحد الأدني لدرجة حاصل الذكاء لأولئك الذين يدخلون الجامعات، مقربا لأقرب عدد صحيح هو 122

انظر كتاب مقدمة في نظرية الاحتمالات من صفحة 228 الى صفحة 243

التوزيع الطبيعي + التوزيع الطبيعي القياسي (المعيارى): دالة كثافته الاحتمالية، بعض خواص التوزيع، الدالة المولدة للعزوم، التوقع والتباين، كيفية حساب الاحتمالات+ الامثلة المذكورة.