# الباب الثالث

## تطور علم الرياضيات

# الباب الثالث

## تطور علم الرياضيات

## الفصل الأول

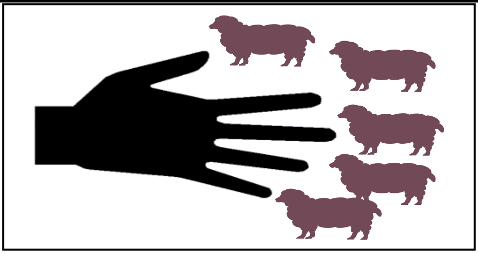
## تطور الأعداد ونظم العد

الإنسان هو الكائن الوحيد القادر بما حباه الله وأنعم عليه من تنمية أسلوب المعلومات المفيدة ونقلها عبر الأجيال وجزءاً كبيراً منها يرتبط بالشكل والكم ولذلك يلزم دراسة طريقة للعد والشكل وعلى ذلك فالعد هو اللبنة الأولى في بناء علم الرياضيات وكان تطور أنظمة العد على ثلاثة مراحل أساسية هي مرحلة الحصر ومرحلة العد ومرحلة العدد.

**(أ) مرحلة الحصر Enumeration**

وهي المرحلة التي كان فيها الإنسان يزاوج بما لديه من أشياء بمجموعة متواجدة في البيئة التي يعيش فيها وذلك بعملية مقابلة للعناصر كأن يحتفظ بسجل لعدد قطيع من الأغنام مثلاً يمتلكه بتخصيص قطعة من الحصى أو حفر علامة لكل واحدة من هذا القطيع على قطعة من الصخر مثلاً أو الشجر.

أي لا توجد لغة منطوقة لعناصر المقارنة.



شكل (١)

### (ب) مرحلة العد Numeration

مع التطور كان طبيعياً أن يبدأ الإنسان في استخدام الكلمات للتعبير بدلاً من الإشارة ويمثل هذا انتقالاً لمرحلة العد وذلك باستخدام كلمات عددية للمزاوجة بحسب ترتيب العناصر التي يقارن بها وعلى سبيل المثال:

| | |
|---|---|
| الإصبع الأصغر من اليد اليسرى | قد تعني ما نسميه الآن ١ |
| الإصبع الخاتم لليد اليسرى | قد تعني ما نسميه الآن ٢ |
| الإصبع الأوسط لليد اليسرى | قد تعني ما نسميه الآن ٣ |
| سبابة اليد اليسرى | قد تعني ما نسميه الآن ٤ |
| إبهام اليد اليسرى | قد تعني ما نسميه الآن ٥ |

حيث أصبحت الكلمات العددية محسوسة ومرتبطة بأشياء معدودة.

### (ج) مرحلة العدد Number

كما هو معروف المقصود بالعدد هنا هو العدد الطبيعي ١، ٢، ٣، ... وهو الإجابة عن السؤال (كم؟) ويطلق عليه (العدد الكاردينالي) وتاريخياً كان يعرف الإنسان عدد المجموعة باستخدام المقارنة كان يقول أن لديه من قطيع الأغنام ما يقدر باليد الواحدة (أي خمسة) وبدأ ذلك بوجود مجموعات مقارنة مختلفة بمرور الزمن وأعطاها الإنسان أسماءً عددية معروفة الآن على الصورة ١، ٢، ٣، ...

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| * | & | ** | & | *** | & | **** | & | ... |

شكل (٢)

حيث تزداد كل مجموعة عن سابقتها بواحدة.

## أنظمة العد البدائية:

نظام العد هو مجموعة من الرموز وأساس للتجميع فمثلاً في النظام الحالي والذي يسمى بالنظام العشري نجد الآتي:

(أ) مجموعة الرموز    . ، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

وهي عشرة رموز مستقلة نستخدمها في تسجيل أي عدد

(ب) أساس التجميع    وهو العشرة.

(ج) أسلوب التسجيل    تكتب الأعداد باستخدام فكرة الخانات أو القيم المكانية (الآحاد – العشرات – المئات – ...)

ويتضح ذلك من العدد ١٩٨٣ مثلاً يكتب على الصورة:

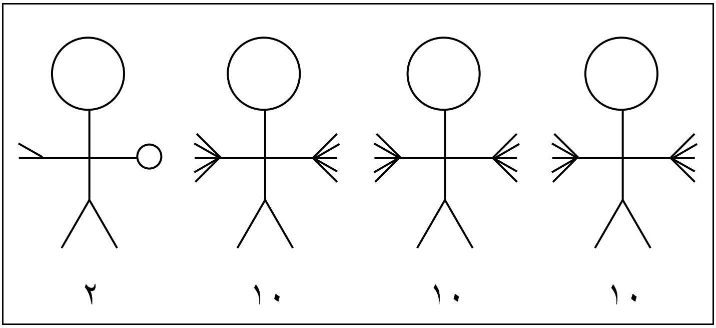
١٩٨٣ =٣ × ١ + ٨ × ١٠ + ٩ × ١٠٠ + ١ × ١٠٠٠

ووصل هذا النظام بعد مجموعة من التطورات ويعرف باسم النظام العربي أو النظام الهندي حيث كان من السائد أن أصل هذه الرموز هندي ونقلها عنهم العرب إلى بغداد في القرن الثامن الميلادي وطوروها واستخدموا الصفر بعد أن كان غير شائع الاستخدام في تسجيل الأعداد ثم أخذ الأوربيون الرموز (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) والتي كانت مستخدمة في المغرب العربي عن كتاب الخوارزمي الذي ترجمه الراهب الإنجليزي أديلارد وانتشر هذا النظام في العالم. وعودة إلى تطور أنظمة العدد نقول أن الإنسان حاول التوسع في مجموعات المقارنة في تتابع مرتب مثل استخدام

(١) أصابع يد واحدة ← أصابع اليدين ← رجل كامل ← ...

(٢) ثم التوسع في التكرار حيث وجدت في بعض الكهوف التي تعود للعصر الحجري

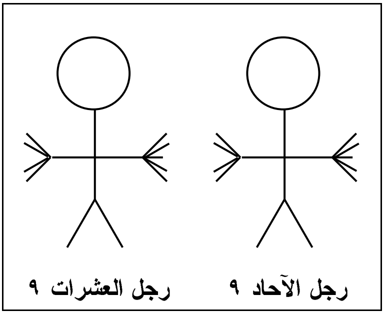
الوسيط صور تبين فكرة هذا التكرار في شكل رجل يمكن تسميته (برجل العد) فمثلاً العدد ٣٢ يظهر كما بالشكل (٣)




**شكل (٣)**

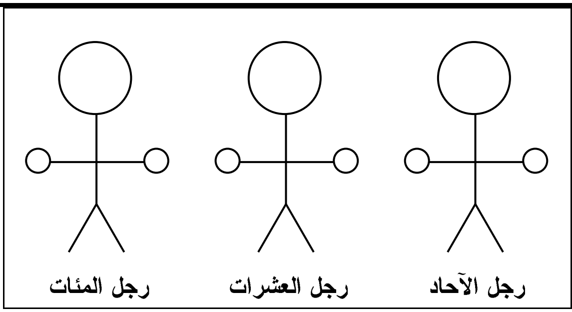
وهذا النظام يسمى بالنظام التكراري الجمعي وحيث أن عملية الجمع إبدالية فلا يهم الترتيب من اليمين أم من اليسار إذ أن العدد يدل عليه مجموع الأصابع التي بالصورة. واستخدم في هذا النظام علامات مكررة عند البابليين والمصريين.

(٣) بعد ذلك تم التوسع في استخدام القيم المكانية وذلك باستخدام فكرة الخانات وبدأ بعد ذلك كتابة أي عدد مهما كان كبيراً باستخدام مجموعة صغيرة من الرموز وكمثال على ذلك العدد ٩٩ يمكن كتابته كما في الشكل (٤).




**شكل (٤)**

والعدد ١٠٠ كما بالشكل (٥).



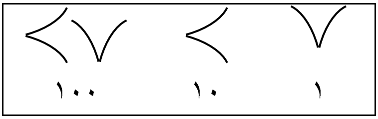

شكل (٥)

حيث يمثل كل رجل قيماً مكانية إلى جانب قيمته المطلقة.

## ١- نظام العد البابلي:

قبل عام (٢٠٠٠ ق. م) كون البابليون نظاماً للعد استخدموا فيه فكرة القيمة المكانية وكان مزيجاً من الأساسين العشري والستيني، فقد كانت الأعداد الأقل من ٦٠ تمثل بنظام عشري والأكبر من ٦٠ تمثل بأساس ستيني وكانت رموزهم هي المسمارية واستخدموا أيضاً فكرة الطرح للتعبير عن بعض الأعداد وكذلك ظهرت الدائرة لتعبر عن العدد صفر (لتمثل عدم وجود عدد).

ورموزهم الأساسية كما بالشكل (٦).



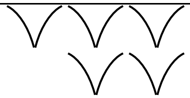
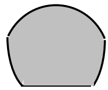
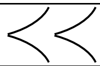
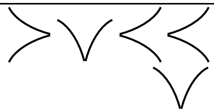
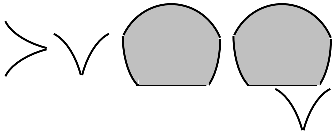
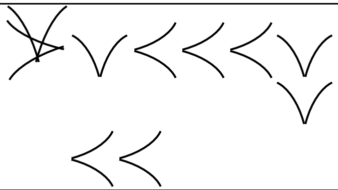

شكل (٦)

غير أن الرمز ∨ كان يستخدم أيضاً ليعني ٦٠، ٣٦٠٠، ... ، أي بصفة عامة (٦٠)$^{\text{ن}}$

كما كان يستخدم الرمز < ليعني أعداداً مثل ١٠ × ٦٠، ١٠ × ٣٦٠٠، ... أي بصفة عامة ١٠ × (٦٠)$^{\text{ن}}$

واستخدموا أيضاً الرمز (–) ليدل على الواحد الصحيح والرمز (+) للعشرة والرمز (#) للعشرين، ...

والشكل التالي يوضح بعض الأعداد بالرموز البابلية:

| | |
|---|---|
|  | وتعني خمسة |
|  | وتعني عشرة ويوجد أكثر من رمز للعشرة |
|  | وتعني عشرين |
|  | وتعني ١٩ ومكتوبة على أساس ٢٠ – ١ حيث < V تعني ناقص |
|  | وتعني ١٩ أيضاً مع ملاحظة أن هذا العدد كان مكروهاً عند البابليين ولذلك يكتبونه ٢٠ – ١ |
|  | تعني $\frac{١}{٢}$ ١٧١ أي ٢ × ٦٠ + ٥٠ + ١ + $\frac{١}{٢}$ |

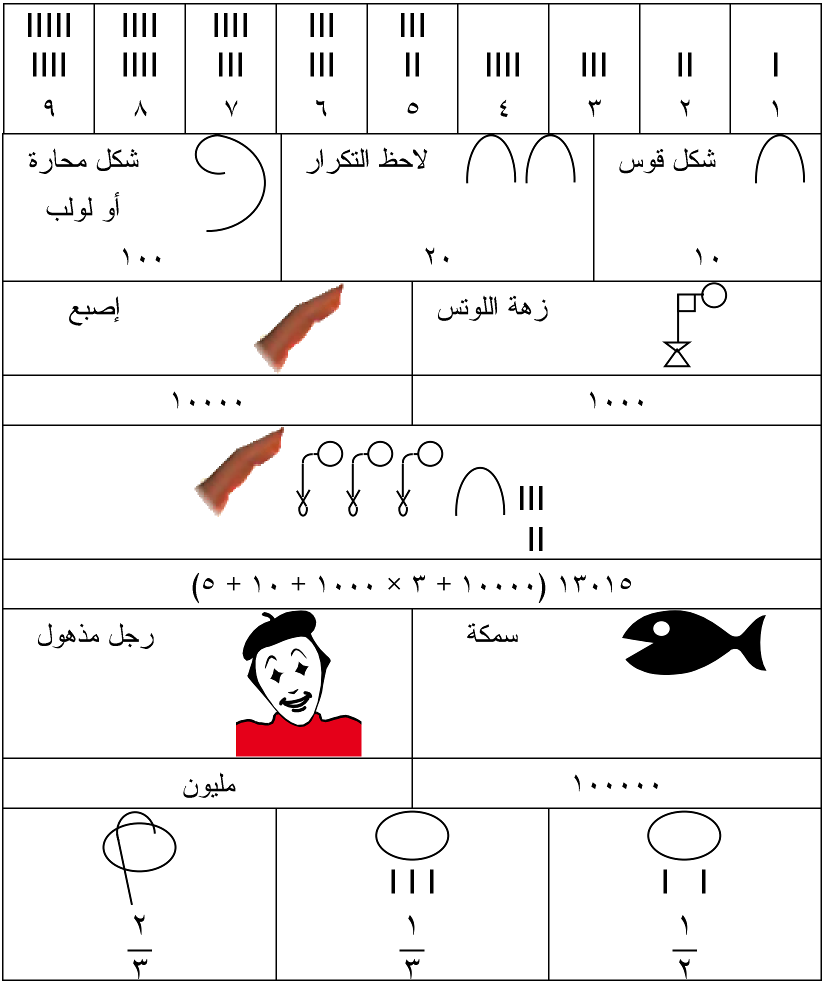
**شكل (٧)**

ولعل ما بقي من أفكارهم الآن هو النظام الستيني المستخدم في بعض وحدات القياس ويعتقد أن هذا النظام كان سائداً في بابل لأنه ارتبط بنظام السنة القمرية ومدتها ٣٦٠ يوماً.

## ٢– نظام العد المصري:

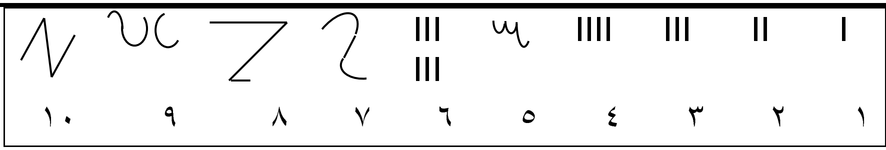
قبل عام (٣٠٠٠ ق. م) كون المصريون نظاماً للعد استخدموا فيه الأساس العشري غير أنه لم يكن به رمز الصفر ولا المكان الخالي وكان نظامهم أيضاً تكرارياً واستخدموا التكرار الضربي في كتابة الأعداد الكبيرة وكانت لهم رموز للكسور حيث

عرفوا الكسور التي بسطها الواحد وسجلوا أحداثهم على مواد حجرية وخشبية وفخارية وعلى أوراق البردي وكانت هذه الرموز تكتب بعناية فائقة أدهشت العالم قديماً وحديثاً وكانت اللغة المصرية القديمة كما هو معروف هي اللغة الهيروغليفية كما بالشكل (٨)




**شكل (٨)**

وقد ظهرت بعدها أعداد مكتوبة باللغة الهيراطيقية بالإضافة إلى اللغة الديموطيقية ورموزها من ١ إلى ١٠ كما بالشكل (٩)




شكل (٩)

ويلاحظ أن نظام العد عند المصريين كان قاصراً لا يساعد على تطور علم الحساب فعلى سبيل المثال للتعبير عن العدد ٨٧٩ يلزمنا أربعة وعشرين علامة مختلفة.
أما في بابل لعب افتقاد الصفر دوراً أساسياً في عدم تطور وإعاقة علم الحساب ونظرية الأعداد.

## ٣– نظام العد الروماني:

استخدم الرومان نظاماً عددياً يعتمد على التكرار وكانت رموزه الأساسية كما بالشكل (١٠)

| I | X | C | M |
|---|---|---|---|
| ١ | ١٠ | ١٠٠ | ١٠٠٠ |
| ثم أضيف إليها الرموز | | | |
| V | L | D | |
| ٥ | ٥٠ | ٥٠٠ | |

شكل (١٠)

وكان الأساس التجميعي عندهم هو العشرة واستخدموا أيضاً فكرة الطرح في كتابة بعض الأعداد فمثلاً الرمز IV يعبر عن العدد ٤ أي ٥ – ١ والرمز CM يعبر عن العدد ٩٠٠ أي ١٠٠٠ – ١٠٠ والرمز IIX يعبر عن العدد ٨ والرمز MCMLXXXIIII يعبر عن العدد ١٩٨٤.
وظل هذا النظام سائداً في أوربا حتى دخول النظام العربي الخوارزمي في القرن العاشر الميلادي وظل النظامان في أوربا حوالي أربعة قرون ثم ساد النظام العربي دون الحاجة

إلى المعداد الذي استخدم في ظل النظام الروماني.

## ٤- نظام العد العربي القديم:

استخدم العرب قديماً نظاماً عددياً يرتبط بالحروف الأبجدية العربية وكانت هذه الفكرة مستخدمة في بعض الحضارات الأقدم مثل القبطية والإغريقية حيث كان يوضع لكل حرف أبجدي عدداً مناظراً له كما بالشكل (١١).

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| أ | ب | ج | د | هـ | و | ز | ح | ط | ي | ك | ل | م | ن |
| ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ٢٠ | ٣٠ | ٤٠ | ٥٠ |
| س | ع | ف | ص | ق | ر | ش | ت | ث | خ | ذ | ض | ظ | غ |
| ٦٠ | ٧٠ | ٨٠ | ٩٠ | ١٠٠ | ٢٠٠ | ٣٠٠ | ٤٠٠ | ٥٠٠ | ٦٠٠ | ٧٠٠ | ٨٠٠ | ٩٠٠ | ١٠٠٠ |

**شكل (١١)**

وعندما يراد التعبير عن أعداد أكبر من ذلك كان يتبع نظام تجميعي ضربي فعلى سبيل المثال ٢٠٠٠ = ٢ × ١٠٠٠ ⇔ بغ و ١٠٠٠٠ = ١٠ × ١٠٠٠ ⇔ يغ وكذلك التجميع في كتابة أعداد أخرى مثل ١٩٨٤ ⇔ د ف ظ غ وكما هو واضح لا يوجد في هذا النظام رمز يدل على العدد صفر، وظل هذا النظام سائداً لفترة طويلة حتى أن الشعراء نظموا شعراً لذلك وعلى سبيل المثال:

فقلت لمن أراد الشعر أقصر فَقْد أرخت مات الشعر بعده

ويلاحظ أن هذا بيت شعر في الرثاء ولو تم حساب المقابل العددي للجملة (مات الشعر بعده) ⇔ ١١٢٣ وهو نفس العام الهجري الذي رحل فيه المرثي.

## ٥- نظام العد الحالي:

كما ذكرنا من قبل فالنظام الحالي يطلق عليه النظام العربي الهندي ورموزه إما على الصورة ١، ٢، ٣، ٤ن ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ٠ والتي تستخدم في الشرق العربي ويعتقد أنها من أصول هندية وقد نقلها العرب في عهد الخليفة المنصور من الكتاب

الهندي (الدهانت) وكانت تسمى عند العرب (السند هند) ونقلها إلى بغداد العالم الفلكي الهندي (كانكاه) وترجمها يعقوب بن طارق الذي توفي في العام ٧٩٦م. وإبراهيم الغزاوي الذي توفي عام ٧٧٧م. وتوجد بعض الأقاويل التي ترجع أصولها إلى بلاد فارس أو كابول وقال البعض أنها عربية صرفة وذكر البعض أنها جاءت إلى الإسكندرية بمصر قبل أن تصل بغداد وذلك في القرن الخامس الميلادي ولكن بدون الصفر ولم يلتفت إليها حينئذ. أما الصورة الأخرى فهي 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 0 وهذه الرموز كانت تسمى بالغبارية حيث كانت تكتب على الرمال أو الغبار وتستخدم في المغرب العربي وهناك تشابه بينها وبين الرموز التي كانت تستخدم في النظام العربي القديم حيث: 1 تشبه الحرف أ ، 2 تشبه الحرف ح ، 3 تشبه كلمة حجـ ، 4 تشبه حرف ع ، 5 تشبه كلمة عو ، 6 تشبه حرف هـ ، 7 تشبه الخطاف ، 8 تشبه صفرين فوق بعضهما ، 9 تشبه حرف و.

وقد وجدت وثائق في أسبانيا تعود إلى القرن العاشر تحتوي هذه الرموز وقد كان لسهولة العمل الحسابي بالنظام العربي والذي سماه الغربيون Algorism (ألجوريزم) تكريماً للخوارزمي فضل بقاء هذا النظام وانتهاء النظام الروماني السابق ونود أن نؤكد أن رموز الأعداد الموجودة في المراجع الأجنبية هي رموز عربية وما زالت تكتب من اليمين إلى اليسار بغض النظر عن اللغة المستخدمة في الكتابة وأكد على الصورتين أبو الريحان البيروني على اعتبار الصورة الأولى هندية والثانية عربية.

# الفصل الثاني

## الأعداد الصحيحة

### ١– خصائص الأعداد:

كثير من الفلاسفة ومنهم فيثاغورس (٥٧٠ ق. م) صاحب مدرسة الحساب والهندسة والموسيقى كان يعتبر أن العدد هو أصل كل الأشياء ومن مفاتيح الكون واهتم الفيثاغورثيين ومن بعدهم حتى عصر جاليليو في القرن السادس عشر الميلادي بخواص العدد ومن أشهرهم (إخوان الصفا) وهي مجموعة فلسفية لها معتقدات غريبة في الأعداد منها:

- أن الأعداد (١، ٢، ٣، ٤) تمثل مكونات الطبيعة وهي (النار والماء والهواء والتراب) أما الفيثاغوريون فقد ربطوا بين الأعداد والأشياء على النحو
- النقطة كيان، الخط المستقيم يتحدد بنقطتين والمستوى بثلاث نقاط والفراغ بأربع نقاط وكانوا يقدسون هذا الرباعي المقدس.
- اعتبروا أيضاً أن الأعداد الفردية مذكرة والزوجية مؤنثة.
- العدد واحد ليس في حد ذاته عدداً بل هو مصدر كل الأعداد ولذلك اتخذوه رمزاً للتعقل.
- العدد اثنين يرمز إلى الرأي.
- العدد ثلاثة يرمز إلى القدرة الجنسية.
- العدد أربعة يرمز إلى العدل.

- العدد خمسة يرمز إلى الزواج وذلك لكونه مكون من أول عدد مذكر (٣) وأول عدد مؤنث (٢)
- أسرار الألوان تعرف من صفات العدد خمسة والبرودة من صفات العدد ستة.
- أسرار الصحة في العدد سبعة وسر الحب في العدد ثمانية حيث يتكون من حاصل جمع العدد ثلاثة (الذي يرمز للقدرة الجنسية) والعدد خمسة (الذي يرمز للزواج).

وكان الفيثاغوريون يعتبرون الأعداد فيها (البهي الكريم) و(الكئيب المضجر) فكانوا يعتبرون العدد التام كريم بهي نظراً لندرته أما الأعداد القبيحة الرديئة فكثيرة جداً والعدد التام يعرف على أنه العدد الذي يقبل القسمة على أعداد صحيحة مجموعها يساوي عدداً تاماً. وحينما سئل فيثاغورث عن تعريف الصديق قال: (صديقك من كان صورة منك مثل العددين ٢٢٠، ٢٨٤) والتفسير هو:

العدد ٢٨٤ يقبل القسمة على (١، ٢، ٤، ٧، ١٤٢) ومجموعها ٢٢٠

العدد ٢٢٠ يقبل القسمة على (١، ٢، ٤، ٥، ١٠، ١١، ٢٠، ٢٢، ٤٤، ٥٥، ١١٠) مجموعها ٢٨٤

والاشتغال بعلم الحساب كان من مستلزمات علم الفرائض والشريعة الإسلامية إذن تقضي بتعلمه.

## تصنيفات الأعداد:

فرق الإغريق بين:

(١) الدراسة المجردة للأعداد والتي تختص بخواص الأعداد والعلاقات وتسمى بنظرية الأعداد.

(٢) الاستخدام العملي للأعداد والتي تختص بإجراء عمليات الجمع والطرح

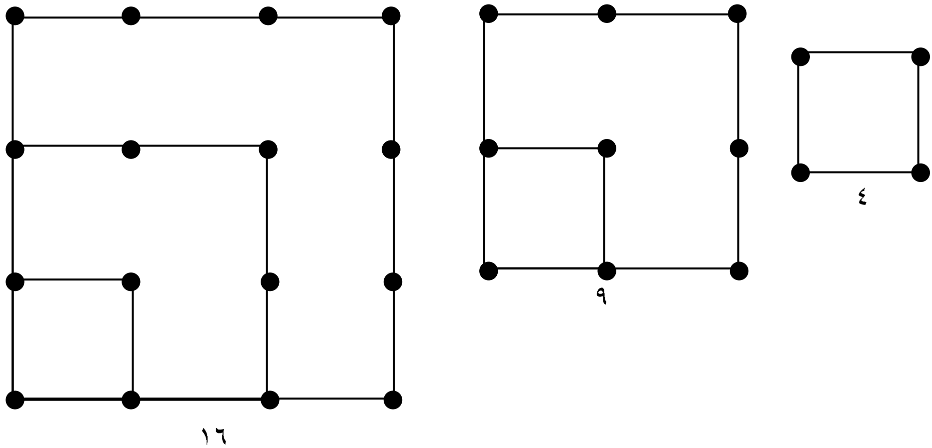
والضرب والقسمة.

## ٢- الأعداد الفردية والأعداد الزوجية:

عرف الفيثاغوريون الفرق والتمييز بينهما حتى يقال أن فيثاغورث قد تعلم ذلك في مصر أو بابل ومثالاً على ذلك:

- في عهد أفلاطون (٤٣٠ – ٣٤٩ ق.م) كانوا يلعبون لعبة شهيرة وهي إخفاء قطع من النقود والسؤال عما إذا كانت زوجية أم فردية.
- المجموع التتابعي للأعداد الفردية يعطي مربعات

١ + ٣ = ٤، ١ + ٣ + ٥ = ٩، ١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦، ...

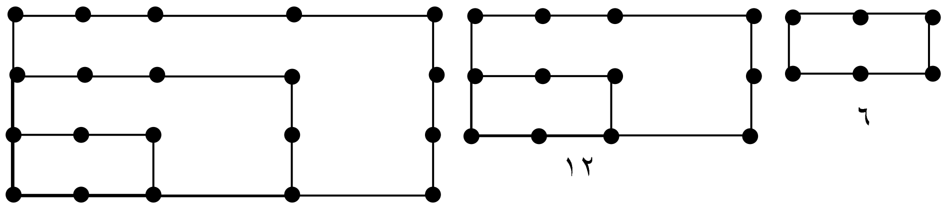



شكل (١٢)

- بينما المجموع التتابعي للأعداد الزوجية يعطي مستطيلات

٢ + ٤ = ٦ = ٢ × ٣، ٢ + ٤ + ٦ = ١٢ = ٣ × ٤،

٢ + ٤ + ٦ + ٨ = ٢٠ = ٤ ، ٥




شكل (١٣)

## ٣– الأعداد هندسية الشكل:

مثل الفيثاغوريون الأعداد بنقاط تأخذ أشكالاً هندسية منتظمة حسب كون العدد ثم دراسة خواصه ومن أشهرها الأعداد المضلعة والتي تمثل بمضلع مغلق ومن أمثلتها:

**(أ) الأعداد المثلثة:**

والتي يمكن تمثيلها بمثلث متساوي الأضلاع مثل (١، ٣، ٦، ١٠، ...) والتي يمثل كل منها مجموعة جزئية من المتتابعة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ... حيث:

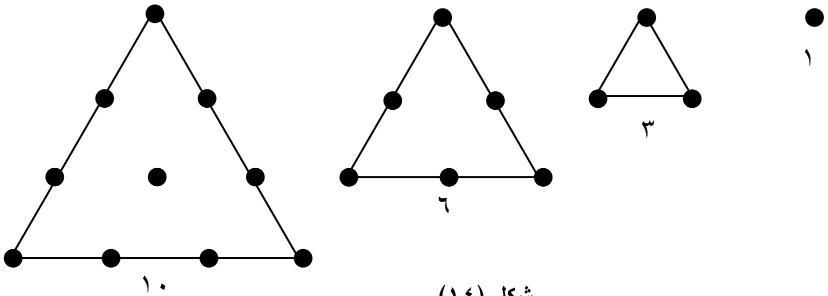
١ = ١ عدد مثلث

١ + ٢ = ٣ عدد مثلث

١ + ٢ + ٣ = ٦ عدد مثلث

١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠ عدد مثلث

١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ = ١٥ عدد مثلث وهكذا




شكل (١٤)

**<u>(ب) الأعداد المربعة:</u>**

وهي التي تمثل بعدد مربع (أي يوجد عدد يضرب في نقطة فيعطي العدد المربع) مثل ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...

١ = ١

١ + ٣ = ٤ = (٢)$^{٢}$

١ + ٣ + ٥ = ٩ = (٣)$^{٢}$

١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦ = (٤)$^{٢}$

١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩ = ٢٥ = (٥)$^{٢}$ ...

وسبق ومثلها الشكل رقم (١٢)

ويلاحظ فيها أن كل مربع يساوي مجموع عددين مثلثين متتابعين حيث ٤ = ١ + ٣، ٩ = ٣ + ٦، ١٦ = ٦ + ١٠، ...

**<u>(ج) الأعداد المخمسة:</u>**

وهي التي يمكن تمثيلها بشكل خماسي منتظم ومن أمثلتها ١، ٥، ١٢، ٢٢، ... ويتكون العدد الخماسي من مجموع عدد مثلث وآخر مربع

٥ = ١ + ٤ حيث ١ مثلث، ٤ مربع

١٢ = ٣ + ٩ حيث ٣ مثلث، ٩ مربع

٢٢ = ٦ + ١٦   حيث ٦ مثلث، ١٦ مربع

٣٥ = ١٠ + ٢٥  حيث ١٠ مثلث، ٢٥ مربع ...

**(د) الأعداد الأولية:**

عرفها أرسطو (٢٨٤ – ٣٢٢ ق.م) وإقليدس (٣٠٠ ق. م) على أساس أنه العدد الذي لا يقاس بأي عدد آخر أما الإغريق فعرفوه على أنه العدد الصحيح الأكبر من الواحد الصحيح ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد الصحيح.

(لاحظ أن الإغريق لم يعترفوا بالواحد الصحيح كونه عدداً)

مثالاً على ذلك ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ...

وقد تمت محاولات عديدة لوضع قاعدة للعدد الأولي ولكنها جميعها باءت بالفشل حيث أن الأعداد الأولية لا نهائية وما تم وضعه بالفعل لحد معين فقط.

**(هـ) الأعداد التامة:**

القاسم التام لعدد صحيح هو عامل من عوامل العدد بشرط ألا يكون العدد نفسه مثالاً على ذلك:

القواسم التامة للعدد ٨ هي ١، ٢، ٤

القواسم التامة للعدد ٦ هي ١، ٢، ٣

القواسم التامة للعدد ١٢ هي ١، ٢، ٣، ٤، ٦

أما العدد التام فيعرف على أنه العدد الذي يساوي مجموع قواسمه التامة

العدد ٦ عدد تام لأن ٦ = ١ + ٢ + ٣

العدد ٢٨ عدد تام لأن ٢٨ = ١ + ٢ + ٤ + ٧ + ١٤

وقد وضع إقليدس قاعدة يمكن بها الحصول على أعداد تامة وذلك بحساب المجاميع الجزئية للمتسلسلة ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ...

إذا كان أحد المجاميع عدد أولي فيضرب هذا المجموع في الحد الأخير للمتسلسلة

فيعطي عدداً تاماً فمثلاً:

١ + ٢ = ٣ عدد أولي والحد الأخير هو ٢

∴ ٢ × ٣ = ٦ وهو عدد تام

كذلك:

١ + ٢ + ٤ = ٧ عدد أولي والحد الأخير هو ٤

∴ ٤ × ٧ = ٢٨ وهو أيضاً عدد تام

وهكذا ولكنها طريقة صعبة جداً لأن العدد التام الخامس بهذه الطريقة هو ٣٣٥٥٠٣٣٦.
وفي عام ١٩٦١ تم الوصول إلى العدد التام رقم (٢٠) وهو مكون من ٢٦٦٣ رقماً.
وحتى عام ١٩٨٠ أصبح عدد الأعداد التامة المعروفة هو (٢٣) أكبرها مكون من ٦٧٥١ رقماً.

**<u>(و) الأعداد الناقصة:</u>**

العدد الذي مجموع قواسمه التامة أقل منه يسمى عدداً ناقصاً.

العدد ٨ > ١ + ٢ + ٤

العدد ٩ > ١ + ٣

العدد ٢٧ > ١ + ٣ + ٩

**<u>(ك) الأعداد الزائدة:</u>**

وهي الأعداد التي مجموع قواسمها التامة أكبر منها.

العدد ١٢ < ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٦

العدد ١٨ < ١ + ٢ + ٣ + ٦ + ٩

وأول عدد زائد فردي هو ٩٤٥.

**<u>(ل) الأعداد المتحابة:</u>**

الأعداد المتحابة هي التي يكون مجموع القواسم التامة لأي منها يساوي الآخر.

والمثال المذكور فيما سبق خير دليل على ذلك والذي يمثل العددين ٢٢٠، ٢٨٤.

وكان الشخص يبحث عن صديق له بحيث يكون حساب الجمل لاسميهما عددين متحابين.

وقد توصل أويلر (١٧٤٧م) إلى ٦٠ زوجاً من الأعداد المتحابة وتوصل نيكولاي بجانيني وهو في سن السادسة عشرة إلى أن العددين ١١٨٤، ١٢١٠ عددان متحابان عام (١٨٦٦م)ومن أزواج الأعداد المتحابة المعروفة (٢٦٢٠، ٢٩٢٤) ، (٥٠٢٠، ٥٥٦٤) ، (٦٢٣٢، ٦٣٦٨) وقيل أن ثابت بن قرة (في القرن التاسع الميلادي) وأحد مترجمي كتاب (الأصول) لإقليدس وجد قاعدة لإيجاد الأعداد المتحابة كما يلي:

لتكن أ = ٣ × ٢$^{\text{ن}}$ – ١ ، ب = ٣ × ٢$^{\text{ن} - 1}$ – ١ ، جـ = ٩ × ٢$^{2\text{ن} - 1}$ – ١

حيث ن عدد صحيح فإذا ما كانت أ، ب، جـ أعداداً أولية فإن العددين

ق = ٢$^{\text{ن}}$ × أ × ب ، ك = ٢$^{\text{ن}}$ × جـ

يكونان متحابين

مثال يوضح ذلك

بوضع ن = ٢ نحصل على:

أ = ٣ × ٢$^{2}$ – ١ = ١١ ، ب = ٣ × ٢$^{2-1}$ – ١ = ٥

جـ = ٩ × ٢$^{4-1}$ – ١ = ٧١

∴ ق = ٢$^{2}$ × ١١ × ٥ = ٢٢٠ ، ك = ٢$^{2}$ × ٧١ = ٢٨٤

وهما عددان متحابان.

# الفصل الثالث

# الكسور

## ١- الكسور العادية:

وجدت الأعداد الكسرية عند البابليين ولكن أول استخدام لها كان في عام ١٥٥٠ قبل الميلاد في مصر القديمة وذلك في كتاب أحمس، أي أن المصريين القدماء كانت لهم خبرة طويلة في مجال الكسور واستخداماتها وكان أول ظهور لهذه الكسور في صورة الكسور ذات البسط واحد صحيح (١/٢، ١/٣، ١/٤٢، ...) وكانت تسمى بكسور الوحدة وكانت فكرة أحمس عن الكسور نفس فكرة النسبة فكان الكسر ١/٤٣ يعني شيئاً قريباً من ١ : ٤٣ وكان قديماً يعبر عن الكسر ٢/٤٢ بالرمز ،، حيث (٠) تدل على شرطة الكسر والرمز ⌐¬ يعني ٤٢ باللغة الهيروغليفية والرمز ،، يعني ٢ ووجدت في بعض الكتب الإنجليزية في القرن الثامن عشر النقطة في الكسور حيث وجد مثلاً الكسر ٠/٢ ليعني ١/٢ .

وكانت طريقة أحمس تعلم في المعابد والدليل على ذلك كان في بردية أحميم (القرن الثامن الميلادي) واستخدمها الرياضي المشهور سعدي بن يوسف الفيومي في سنة (٩٤٠م) في حساب المواريث.

وفي القرن الثاني عشر وضع فيبوناتس قاعدة لتجزيء الكسور ومن بين القواعد

المعروفة القاعدة التالية:

ليكن الكسر $\frac{\text{أ}}{\text{ب جـ}}$ وليكن ب جــ + جــ = ك أ

في هذه الحالة:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{\text{ب} \times \frac{\text{ب + جـ}}{\text{أ}}} + \frac{١}{\text{جـ} \times \frac{\text{ب + جـ}}{\text{أ}}}$$

أي أن:

$$\frac{٢}{١٥} = \frac{٢}{٣ \times ٥} = \frac{١}{٣ \times \frac{٨}{٢}} + \frac{١}{٥ \times \frac{٨}{٢}}$$

$$\therefore \frac{٢}{١٥} = \frac{١}{١٢} + \frac{١}{٢٠}$$

وقد كان للإغريق والرومان طريقتهم الخاصة في الكسور ولكنهم تفادوا التعامل معها. وتعود الصورة الحالية في كتابة الكسور إلى الهنود مع التأكيد على أن العرب هم أول من استعمل شرطة الكسر وسنورد الآن مثالاً على طريقة جمع الكسور في القرن الخامس عشر.

## مثال (١):

**أوجد ناتج جمع $\frac{٥}{٦} + \frac{٣}{٨}$**

$$\begin{array}{ccc} ١٨ & & ٤٠ \\ \frac{٣}{٨} & \times & \frac{٥}{٦} \end{array}$$

$$١ \frac{٥}{٢٤} \left| \begin{array}{c} ٥٨ \\ ٤٨ \end{array} \right.$$

ويلاحظ استخدام حاصل ضرب المقامين كمضاعف مشترك ثم اختزال الناتج.

## مثال (٢): (طريقة الضرب في القرن الخامس عشر)

أوجد حاصل ضرب $\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٤}$

$$\frac{٣}{٤} \quad \text{—————} \quad \frac{٤}{٥}$$

$$\frac{١٢}{٢٠}$$

هي نفس الطريقة الحالية مع اختلاف طريقة الكتابة فقط.

أما في القرن الحادي عشر الميلادي فقد وضح الكوفي بعض طرق الحل التي كان يستخدمها العرب ومنها:

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب}}}{\text{د}} = \frac{\frac{\text{أ جـ}}{\text{د}}}{\text{ب}}$$

مثال على ذلك

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٧} = \frac{\frac{١٠}{٣}}{٧} = \frac{\frac{١٠}{٧}}{٣}$$

## مثال (٣): (طريقة القسمة في القرن الخامس عشر)

**احسب خارج قسمة** $\frac{٢}{٣} \div \frac{٣}{٤}$

$$\frac{٢}{٣} \div \frac{٣}{٤} = \frac{٨}{١٢} \div \frac{٩}{١٢} = \frac{٨}{٩}$$

وتعتمد على تحويل الكسرين إلى كسرين متحدي المقام ثم قسمة بسط الأول على الثاني.

## مثال (٤): (القسمة في القرن السادس عشر)

**أوجد خارج قسمة** $\frac{٢}{٣} \div \frac{٣}{٤}$

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٨}{٩}$$ (ضرب تصالب)

وجوهرها الضرب في مقلوب المقسوم عليه التي كانت مستخدمة عند الهنود والعرب.

## ٢– الكسور العشرية

لم تظهر الكسور العشرية إلا بعد حوالي ألف عام من ظهور نظام العد العربي وكانت ترتبط بفكرة الجذور وكانت معروفة في الشرق عند اليهود والعرب وقد شرحها بالتفضيل الكوفي في كتابه وكذلك الرياضي والفلكي العربي غياث الدين الكاشي (١٤٣٠م) أعطى قيمة للنسبة التقريبية (ط) محسوبة إلى ١٦ رقماً عشرياً في كتابه (رسالة المحيط) وفي عام ١٥٢٢م وضع الرياضي الألماني آدم ريس جداول للجذور التربيعية مضروبة في ١٠٠٠، فمثلاً $\sqrt{٢}$ = ١٤١٤ وفي عام ١٥٣٠م وضع الألماني رادولف جداول للفوائد المركبة متضمنة الكسور العشرية وكانت تكتب على الشكل ٣,٤ = ٣/٤ أما الفرنسي ڤيتا (١٥٧٩م) فهو أول من نظم الكسور العشرية بوضع الفاصلة والشرطة الرأسية لعلامات عشرية ومع ذلك ينسب اختراع الكسور العشرية إلى الرياضي الهولندي سيمون ستيڤن والذي نشر عام ١٥٨٥م كتيباً من سبع صفحات يتضمن شرح الكسور العشرية وقواعد إجراء العمليات الحسابية عليها وقد كان يكتب الأعداد العشرية على الصورة:

العدد العشري ٥,٩١٢ يكتب كالتالي:

٣ ٢ ١ ٠
٢ ١ ٩ ٥

حيث ⓪ فوق العدد الصحيح و ① فوق الجزء من عشرة و ② فوق الجزء من مائة و ③ فوق الجزء من ألف

أو على الصورة ③ ٢ ② ١ ① ٩ ⓪ ٥

وكانت توجد طرق أخرى عديدة لكتابة الكسور والأعداد العشرية. ومن الملاحظ أنه

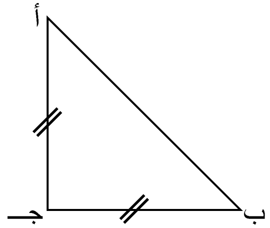
حتى عصرنا هذا لا يوجد اتفاق موحد على العلامة العشرية ففي اللغة العربية والفرنسية تستخدم الفاصلة (,) وفي اللغة الإنحليزية تستخدم النقطة (.).

وفي عهد البابليين (أي حوالي ٢٠٠٠ ق.م) وحتى العصور الوسطى عصر النهضة استخدم أيضاً ما يسمى بالكسور الستينية أو الكسور التي مقاماتها ٦٠، $٦٠^{٢}$، $٦٠^{٣}$، ..

## ٣– الأعداد الصماء

اكتشف الإنسان الأعداد الصماء بعد معرفته بالأعداد الطبيعية والكسور وسميت بالأعداد غير الطبيعية وذلك في القرن الخامس قبل الميلاد حيث اكتشف الفيثاغوثيين أن النسبة بين طول قطر المربع وطول ضلعه لا يمكن أن تكون عدداً صحيحاً أو نسبياً حيث العدد النسبي ما يعبر عنه بالنسبة $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ حيث م، ن أعداد صحيحة وليست صفراً وليس بينهما عامل مشترك.

ولنفرض مثلثاً قائم الزاوية ومتساوي الساقين أ ب جـ




$$\overline{\text{أ ب}}^{٢} = \overline{\text{أ جـ}}^{٢} + \overline{\text{ب جـ}}^{٣}$$

وباعتبار أ جـ هو وحدة القياس فإن $\overline{\text{ب}}^{٢}$ = ١ + ١ = ٢

وبالتالي السؤال المطروح هو ما طول أ ب؟

أو ما هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه يعطي العدد ٢؟

وعندئذ بدأ المأزق عندما اكتشف الفيثاغورثيون أن العدد غير موجود

إثبات أن $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي

بفرض أن $\sqrt{٢}$ عدد نسبي أي يمكن التعبير عنه على الصورة $\frac{م}{ن}$

أي أن: $\sqrt{٢} = \frac{م}{ن}$

حيث م، ن عددان لي بينهما عامل مشترك.

وبتربيع الطرفين $\frac{م^٢}{ن^٢} = ٢$

$\therefore$ $م^٢ = ٢ن^٢$ وبالتالي $م^٢$ عدد زوجي

$\therefore$ م عدد زوجي أيضاً وليكن في الصورة ٢ل حيث ل عدد صحيح وبالتعويض عن $م^٢$ نحصل على

$$٤ل^٢ = ٢ن^٢ \quad \text{أو} \quad ن^٢ = ٢ل^٢$$

أي أن $ن^٢$ عدد زوجي وبالتالي فإن ن أيضاً هو عدد زوجي ويمكن وضعه في الصورة ن = ٢ك

وبالتالي فإن:

$$\sqrt{٢} = \frac{م}{ن} = \frac{٢ل}{٢ك} = \frac{ل}{ك} \quad \text{(أي بينهما عامل مشترك)}$$

وهذا ما يناقض الفرض وبالتالي يكون $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي ولذلك وجد الفيثاغورثيين نفسهم أمام طريقين:

الأول: أن تكون فكرة القياس غير حقيقية.

الثاني: توسيع الأعداد ليتضمن مفهومها العدد غير نسبي أو (الأعداد الصماء)

وعلى ذلك اختار الفيثاغورثيين الحل الأول وأبعدوا فكرة القياس عن الهندسة (أي الفصل بين الحساب والهندسة) أما عن فكرة وصف الأعداد ($\sqrt{٢}$، $\sqrt{٣}$، ...) على

أنها صماء فتعود إلى الرياضيين العرب ولقد تحدث عنها الخوارزمي (٨٢٥م) ولقد استحوذت هذه الأعداد على اهتمام الرياضيين منذ عهد فيثاغورث في القرن الخامس قبل الميلاد وحتى ڤايرستراس في القرن التاسع عشر وكانت الاهتمامات القديمة تنحصر في إيجاد قيم تقريبية لأعداد مثل $\sqrt{\text{٢}}$ ومن هذه الطرق ما استخدم في العصور القديمة والوسيطة لإيجاد قيمة أو قيم تقريبية لـــ $\sqrt{\text{ن}}$ وحيث ن عدد غير مربع.

بوضع ن = $\text{أ}^{\text{٢}}$ + ق ويمكن الحصول على قيم تقريبية على الصورة

$$\text{أ}_{\text{١}} = \text{أ} + \frac{\text{ق}}{\text{٢أ}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{٢}} = \frac{\text{ن}}{\text{أ}_{\text{١}}} = \text{أ} + \frac{\text{ق}}{\text{٢أ} + \frac{\text{ق}}{\text{٢}}} \text{ ، } \ldots$$

على سبيل المثال:

[ه = [(:٢):٢ :+: :١: :١: : أ = ٢، ق = ١

$\therefore \text{أ}_{\text{١}} = \text{٢} + \frac{\text{١}}{\text{٤}} = \text{٢,٢٥}$ تقريب أول

$\text{أ}_{\text{٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢,٢٥}}$ تقريب ثاني

$\text{أ}_{\text{٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢,٢٢}}$ تقريب ثالث

$\vdots$

أما العرب في (العصور الوسطى) فقد أعطوا تقريباً في الصورة:

$\text{أ}_{\text{١}} = \text{أ} + \frac{\text{ق}}{\text{٢أ} + \text{١}}$ أي أن

$$\text{[ه} = \text{٢} + \frac{\text{١}}{\text{٤} + \text{١}} = \text{٢}\frac{\text{١}}{\text{٥}} = \text{٢,٢}$$

أما في العام (١١٧٥م) فقد استخدم أبو بكر الحصار القاعدتين

$$\text{(١)} \qquad \text{[ن} = \text{أ} + \frac{\text{ق} + \text{١}}{\text{٢أ} + \text{٢}}$$

$$\text{[ه} = \text{٢} + \frac{\text{١} + \text{١}}{\text{٤} + \text{٢}} = \text{٢} + \frac{\text{٢}}{\text{٦}} = \text{٢}\frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

$$(٢) \qquad \sqrt{\text{ن}} = \text{أ} + \frac{\text{ق}}{٢\text{أ}} - \frac{\left(\frac{\text{ق}}{٢\text{أ}}\right)^{٢}}{٢\left(\text{ق} + \frac{\text{ق}}{٢\text{أ}}\right)}$$

$$\sqrt{٥} = ٢ + \frac{١}{٤} - \frac{\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢}}{٢\left(١ + \frac{١}{٤}\right)}$$

$= ٢,٢٥ - ٠,٠٢٥ = ٢,٢٢٥$ وهو تقريب أفضل.

وفي القرن الخامس عشر (التاسع الهجري) ألف أبو الحسن القلصاوي كتاب (كشف الأسرار عن علم الغبار)، (كشف الجلباب عن علم الحساب) ووضع القاعدة التالية لحساب $\sqrt{\text{ن}}$

$$\sqrt{\text{ن}} \simeq \frac{٤\text{أ}^{٣} + ٣\,\text{أ}\,\text{ق}}{٤\,\text{أ}^{٢} + \text{ق}}$$

وقد ظهرت أيضاً قواعد لحساب الجذور التكعيبية وأعطى ستيفن القاعدة

$$\sqrt[٣]{\text{ن}} = \text{أ} + \frac{\text{ق}}{٣\text{أ}(\text{أ} + ١) + ١}$$

فمثلاً: $٩ = ٨ + ١ = (٢)^{٣} + ١$

$$\therefore \sqrt[٣]{٩} = ٢ + \frac{١}{٦ \times ٣ + ١} = ٢ + \frac{١}{١٩} = ٢\frac{١}{١٩}$$

## ٤– الأعداد السالبة:

واجهت الإنسان عدة مشاكل رياضية عند حل معظم مسائل الجمع والضرب والقسمة وهي احتياجاته إلى طرح الأعداد وإضافة أعداد سالبة فبدأت محاولاته الجادة في معالجة الأعداد السالبة في القرن السادس عشر على يدي كاروان وستيفل على

الرغم من مراحل سابقة ظهرت فيها فكرة الأعداد السالبة فالصينيين كانوا يستخدمون الأعداد السالبة حيث كانت الأعداد الموجبة تمثل بقضبان حمراء والأعداد السالبة بقضبان سوداء وقدم الرياضي الصيني (شو – شاي – كيه) في كتابه (مقدمة في الدراسات الرياضية) قاعدة الإشارات في عام ١٢٩٩م. أما عند الإغريق فوردت فكرة العدد السالب على يد ديوفانتس (٢٧٥م) حيث تحدث عن المعادلة ٤س + ٢٠ = ٤ على أنها سخيفة ومنافية للعقل لأنها تعطي س = −٤ وعرفوا هذه الأعداد على أنها أعداد مطروحة وليست ذات معنى مجرد للعد السالب كما حذا الهنود والعرب حذوهم في ذلك وفي كتاب الخوارزمي (الجبر والمقابلة) كانت الجذور السالبة في حلول معادلات الدرجة الثانية مرفوضة وكذلك اتبع فيبوناتس (١٢٠٢م) العادة العربية في رفض الأعداد السالبة أما في العام (١٥٤٥م) فقد اعترف كاردان بالحلول السالبة للمعادلات وأعطى قوانين بسيطة وواضحة للتعامل مع الأعداد السالبة وذكر ستيفل (١٥٤٤م) الأعداد السالبة كأعداد مميزة على أنها أعداد أقل من الصفر.

أما الفهم الكامل للأعداد السالبة فيرجع الفضل فيه إلى كوكبة من العلماء أمثال فيتا وهاريوت وفرمات وديكارت وهود.

وتحدث تارتاجليا (١٥٥٦م) عن العدد السالب بوصفه الحد الذي يبدأ بناقص واستخدم بومبلي كلمة ناقص في القاعدة (ناقص × ناقص = زائد)

## ٥– الأعداد التخيلية:

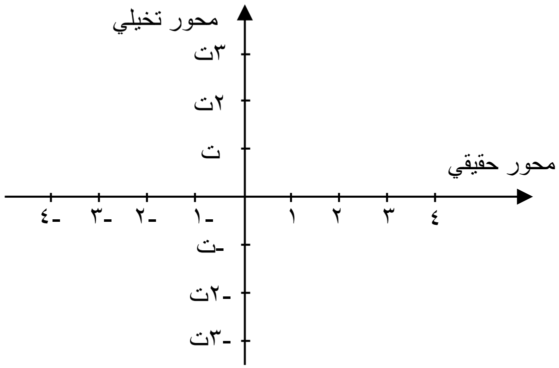
واجه بعض الرياضيون القدامى أمثال هيرون الإسكندري (٥٠م) وديوفانتس الإغريقي (٢٧٥م) مشكلات في حل معادلات تتضمن حلولاً تخيلية مثل [٨١: :-: :٤:١٤: أو إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية محيطه ١٢ ومساحته ٧ وقد أهملوها واعتبروها مستحيلة دون الالتفات لوجود أعداد مثل [−٣:٦: .

أما العرب فقد أهملوا تلك الكميات التي تحتوي على جذور تخيلية ولكن كاردان (١٥٤٥م) كان أول من تعامل مع الجذور التربيعية للأعداد السالبة حيث بدأ بحل مسألة يقسم بها العدد (١٠) إلى جزئين حاصل ضربهما يساوي (٤٠) وأعطى العددين على الصورة ٥ + $\sqrt{-١٥}$ ، ٥ − $\sqrt{-١٥}$ وسماها حلول بواسطة جذور النواقص وأثبت صحتها بضرب العددين.

وقد كان واليس (١٦٧٣م) أول من فكر في تمثيل الأعداد التخيلية بيانياً وكان ليبنز (١٦٧٦م) من الذين اهتموا بدراسة الأعداد التخيلية حيث حلل المقدار $س^{٤} + أ^{٤}$ إلى

$(س + أ\sqrt{-\sqrt{-أ}})(س - أ\sqrt{-\sqrt{-أ}})(س + أ\sqrt{\sqrt{-أ}})(س - أ\sqrt{\sqrt{-أ}})$

وقد كان أول من عالج هذه الأعداد هندسياً هو الرياضي النرويجي كاسبار ڤيسيل (١٧٩٧م).




كما نسب هذا التمثيل البياني إلى رياضيين كثيرين أشهرهم أرجاند وجاوس (القرن التاسع عشر). كما وينسب إلى أويلر (١٧٤٨م) استخدام الرمز (i) والذي ترجمته العربية (ت) للعدد $\sqrt{-١}$ وكوشي أول مستخدم للأعداد المترافقة أ + ب ت، أ − ب ت وكذلك مصطلح المقياس للعدد $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ وسمي وايرستراس العدد $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ على أنه القيمة المطلقة للعدد المركب أ + ب ت وسماها جاوس معيار هذا العدد.

# الفصل الرابع

## العمليات الحسابية على الأعداد

العمليات الحسابية من الضروريات الأساسية لحياة البشر وقد استخدم المعداد في أوربا وغير من الطرق المختلفة حتى قرابة القرن السابع عشر، ومن هذه الطرق أو الصور:

**(١) عملية الجمع:**

**مثال (١):**

لجمع العددين ٧٧٧ + ٢١٦ (بالطريقة الرومانية القديمة)

| | |
|---|---|
| DCC<XXVII | ٧٧٧ |
| CCXVI | ٢١٦ |
| DCCCC<XXXVVIII | ٩٩٣ |

حيث يمكن كتابة الناتج بصورة مختصرة CMXCIII حيث CM = ٩٠٠ أي (١٠٠٠ – ١٠٠) و XC تعني ٩٠ أي (١٠٠– ١٠)

**مثال (٢):**

لجمع ٢، ٥، ٣٢، ١٩٣، ١٨، ١٠، ١٠٠ (بالطريقة الهندية) وذلك حسب مقولة الرياضي الهندي (باسكارا) (١١٥٠م) لصغيرته ليلاڤاتي قائلاً: (عزيزتي ليلا أظهري مهارتك في الجمع بأن تجدي لي المجموع)

وكانت طريقة الجمع كالتالي:

(١) مجموع الآحاد: ٢ + ٥ + ٢ + ٣ + ٨ + ٠ + ٠ = ٢٠

(٢) مجموع العشرات: ٠ + ٠ + ٣ +٩ + ١ + ١ + ٠ = ١٤

(٣) مجموع المئات: ٠ + ٠ + ٠ + ١ + ٠ + ٠ + ١ = ٢

(٤) ∴ المجموع هو ٣٦٠

وهناك بعض الأمثلة التي تظهر أن الهنود كانوا في بعض الأحيان يجمعون من اليسار إلى اليمين ثم يعدلون المجاميع كلما احتاج الأمر إلى ذلك كما في المثال:

| |
|---|
| ٦٥٣٩ |
| ٣٢٨٦ |
| ٩~~٧٧~~٥ |
| ٨٢ |

أي أن ٦٥٣ + ٣٢٨٦ = ٩٨٢٥

## مثال (٣): (طريقة الجمع عند العرب)

العرب كانوا يكتبون المجموع أعلى الأعداد المطلوب جمعها وكانوا يستخدمون مجموع الأرقام للتحقق من صحة النتائج كما في المثال الآتي لجمع العددين ٥٦٨٧ + ٢٣٤٣

| | |
|---|---|
| ٨٠٣٠ | ٢ |
| ٥٦٨٧ | ٨ |
| ٢٣٤٣ | ٣ |

والعمود الأخير يمثل طريقة التحقق من صحة النتيجة حيث مجموع أرقام العدد ٥٦٨٧ هو ٧ + ٨ + ٦ + ٥ = ٢٦، مجموع أرقام العدد ٢٦ هو ٦ + ٢ = ٨

مجموع أرقام العدد ٢٣٤٣ هو ٣ + ٤ + ٣ + ٢ = ١٢ ومجموع أرقام العدد ١٢ هو ٢ + ١ = ٣

مجموع أرقام العدد ٨٠٣٠ هو ٠ + ٣ + ٠ + ٨ = ١١ ومجموع أرقام العدد ١١ هو ١ + ١ = ٢ وهو يتفق مع مجموع أرقام العددين ٨ + ٣ = ١١

⇐ ١ + ١ = ٢

(لاحظ أن هذه القاعدة ليست صحيحة بصفة عامة)

## مثال (٤): (طريقة أخرى للجمع عند العرب)

استخدمت طرق أخرى مثل الطريقة التي كان يكتب فيها مجموع كل عمود منفصلاً ثم تجمع المجاميع. مثالاً على ذلك

| |
|---|
| ٨٣٧٩<br>٩٦٨<br>٣٤ |
| ٢١<br>١٦<br>١٢<br>٨ |
| ٩٣٨١ |

**٢- عملية الطرح:**

## مثال (١): (طريقة الطرح من عشرة والتكملة)

تعتمد هذه الطريقة على المبدأ التالي:

أ – ب = أ + (١٠ – ب) – ١٠

فمثلاً عند طرح ١٢ – ٧

١٢ +(١٠ – ٧) – ١٠ = ١٢ + ٣ – ١٠ = ٥

إذن ١٢ – ٧ = ٥

ولإجراء العملية ٤٢٢ – ٢٨٧ نستخدم مبدأ الاستلاف من الرقم المجاور بقيمة خانته

| |
|---|
| ٤٢٢<br>٢٨٧ |
| ١٣٥ |

(١) ٢ – ٧ لا يصح نستلف ١ من خانة العشرات ويساوي عشرة.

(٢) ١٠ – ٧ = ٣، ٣ + ٢ = ٥ توضع في الناتج.

(٣) ٢ يصبح ١ وكذلك ١ – ٨ لا تصح ونستلف ١ من خانة المئات.

(٤) ١٠ – ٨ = ٢، ٢ + ١ = ٣ توضع في الناتج.

(٥) ٤ تصبح ٣ ويكون عندنا ٣ – ٢ = ١ توضع في الناتج.

وهذه الطريقة ما زال معمولاً بها حتى الآن ويستخدمها بعض المدرسين.

## مثال (٢): (الاستلاف والإضافة إلى العدد المطروح منه)

اطرح ٢١٢٢ – ١١٣٤

| |
|---|
| ٢١٢٢ |
| ٢٢٤ |
| ~~١١٣~~٤ |
| ٩٨٨ |

(١) ٢ – ٤ لا يصح نستلف ١ من خانة العشرات (٢) ونرده إلى خان العشرات في العدد السفلي (٣) فتصبح (٤) ويكون الناتج ١٢ – ٤ = ٨ توضع في الناتج.

(٢) ٢ – ٤ لا يصح نستلف ١ من خانة المئات (١) ونردها إلى خانة المئات في العدد السفلي (١) يصبح (٢) ويكون ١٢ – ٤ = ٨ توضع في الناتج.

(٣) ١ – ٢ لا يصح نستلف ١ من خانة الآلاف (٢) ونرده إلى خانة الآلاف (١) يصبح (٢) ويكون ١١ – ٢ = ٩ توضع في الناتج.

(٤) ٢ – ٢ = صفر.

وبذلك يكون الناتج ٩٨٨

واستخدمت هذه الطريقة عند العرب ومنهم القلصاوي (١٤٧٥م)

## مثال (٣): (الطرح من اليسار إلى اليمين)

أوجد ناتج ٥٦٢٥ – ٨٣٩

(١) $\boxed{٥٦}$٢٥ ٥٦ ـ ٨ = ٤٨

- $\boxed{٨}$٣٩

(٢)   ٤٨٢٥   ٨٢ ـ ٣ = ٧٩
- ٣٩

(٣)   ٤٧٩٥   ٩٥ ـ ٩ = ٨٦
- ٩

---

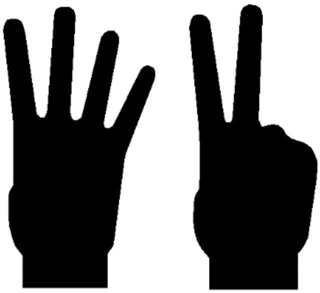
٤٧٨٦

## ٣- عملية الضرب:

نشأت عملية الضرب كعملية جمع تكراري ومضاعفات للأعداد الصحيحة.

### مثال (١):

عملية ضرب ٧ × ٩ باستخدام أصابع اليد:



٦٣ = ٩ × ٧

**شكل (١٥)**

تحسب كالتالي:

(١) ٧ – ٥ = ٢ يرفع إصبعين ونبقي ثلاثة أصابع مطوية.

(٢) ٩ – ٥ = ٤ يرفع أربعة أصابع ونبقي إصبعاً مطوياً.

(٣) مجموع الأصابع المرفوعة = ٦

(٤) نضرب ٦ × ١٠ = ٦٠

(٥) حاصل ضرب الأصابع المطوية = ٣ × ١ = ٣

∴ الناتج = ٦٠ + ٣ = ٦٣

نلاحظ هنا أن عدد العددين المضروبين يجب أن يكون أكبر من خمسة.

## مثال (٢): الطريقة المصرية القديمة

تعتمد على التضعيف وجمع المضاعفات وذلك كالتالي:

١٧ × ١٥ تتم على النحو التالي:

| | |
|---|---|
| ١٧ | ١ |
| ٣٤ | ٢ |
| ٦٨ | ٤ |
| ١٣٦ | ٨ |
| ٢٥٥ | ١٥ |

١٧ = ١ × ١٧
٣٤ = ٢ × ١٧
٦٨ = ٢ × ٣٤
١٣٦ = ٢ × ٦٨

ويكون ناتج حاصل الضرب هو ٢٥ وتم الحصول عليه بجمع ١٧ + ٣٤ + ٦٨ + ١٣٦ المناظرة للأعداد ١ + ٢ + ٤ + ٨ = ١٥ أي أن حاصل ضرب ١٧× ١٥ هو تكرار العدد ١٧ عدة مرات قدرها ١٥ وأحياناً كان قدماء المصريين يكررون العدد ١٧ ١٦ مرة ثم يطرحون من الناتج العدد ١٧ كما يلي

| | |
|---|---|
| ١٧ | ١ |
| ٣٤ | ٢ |
| ٦٨ | ٤ |
| ١٣٦ | ٨ |
| ٢٧٢ | ١٦ |
| ١٧- | ١ |
| ٢٥٥ | ١٥ |

## مثال (٣): (طريقة المعداد)

لم يكن المعداد يحتاج رمز الصفر وكانت عملية الضرب تتم على جداول شبيهة بلوحة الشطرنج كما هو موضح بالمثال التالي:

**أوجد ناتج حاصل ضرب ٤٦٠٠ × ٢٣**

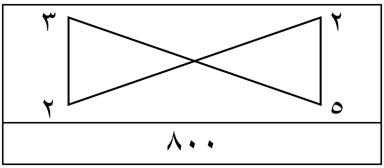
| | CM | XM | M | C | X | I |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | مئات الآلاف | عشرات الآلاف | آلاف | مئات | عشرات | آحاد |
| ٤٦٠٠ | | | ٤ | ٦ | ٠ | ٠ |
| ٣ × ٦ | | | ١ | ٨ | | |
| ٢ × ٦ | | ١ | ٢ | | | |
| ٣ × ٤ | | ١ | ٢ | | | |
| ٢ × ٤ | | ٨ | | | | |
| حاصل الضرب | ١ | | ٥ | ٨ | | |
| × ٢٣ | | | | | ٢ | ٣ |

وعلى ذلك فإن ٤٦٠٠ × ٢٣ = ١٠٥٨٠٠

ويتضح فيها أثر الرموز الرومانية وبداية استخدام الحروف العربية مع الاختلاف عن الطريقة الحالية في وضع المضروب والمضروب فيه والناتج وترك الخانات شاغرة (بدلاً من وضع الأصفار).

## مثال (٤): (الضرب التصالي)

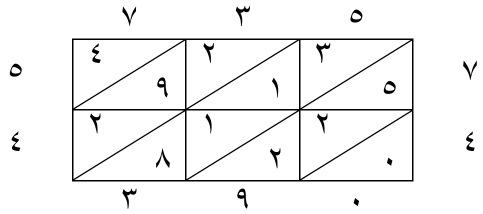
وهي الطريقة التي تستخدم في ضرب المقادير الجبرية وقد استخدمها باسيولي (١٤٩٤م) في كتابه (Sima) وهي طريقة في غاية الصعوبة وخاصة للأعداد الكبيرة ومثالاً على ذلك في حالة ضرب ٣٢×٢٥.




ويتم بضرب ٥ × ٢، ٥ × ٣٠، ٢٠ × ٢، ٢٠ × ٣ والجمع مباشرة ويلاحظ أن هذه الطريقة أو حتى باستخدام علامة الضرب الحالية وهي (X) التي استخدمها راين ومعاصروه (١٦١٨م).

## مثال (٥): (طريقة الشبكة)

كانت هذه الطريقة هي المحببة عند الكثيرين من الهنود والعرب والصينيين والأوربيين ولنأخذ مثالاً لذلك حاصل ضرب ٧٣٥ × ٧٤




مع مراعاة كتابة ٧٣٥ أعلى ٧٤ على اليمين والآحاد أسفل العشرات وتقسيم حواصل الضرب إلى خانات ثم جمع الخانات القطرية فنجد أن:

٥٤٣٩٠ = ٧٤ × ٧٣٥

## مثال (٦): (طريقة التجزيء)

استخدمت هذه الطريقة عند الإغريق والعرب ومثالاً على ذلك نوجد حاصل ضرب ٢٦٥×١٤٣ وتبدأ من اليسار إلى اليمين

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٥ | ٦ | ٢ | |
| ٣ | ٤ | (١) | بدء الضرب في ١ |
| ٥٠٠ | ٦٠٠٠ | ٢٠٠٠ | الضرب × ١٠٠ |
| ٢٠٠ | ٢٤٠٠ | ٨٠٠٠ | الضرب × ٤٠ |
| ١٥ | ١٨٠ | ٦٠٠ | الضرب × ٣ |
| ٧١٥ | ٨٥٨٠ | ٢٨٦٠٠ | = ٣٧٨٩٥ |

أي أن ٢٦٥×١٤٣ = ٣٧٨٩٥

وكان يرجع إلى جداول الضرب المعدة سابقاً لإجراء العمليات الأكثر تعقيداً.

## ٤– عملية القسمة:

تعتبر عملية القسمة من العمليات الأساسية الصعبة وفي الوقت الحالي تعتبر عملية بسيطة ولكن علينا تذكر أن جمع وطرح الأعداد الصحيحة كان يدرس في القرن الخامس عشر الميلادي في الجامعات أوربية قليلة أما عمليات الضرب فكانت تدرس في أرقى الجامعات الإيطالية آنذاك والقسمة كانت تعتبر تخصصاً رفعياً في الجامعات وذلك من خمسمائة عام تقريباً فقط وسوف نعرض الآن بعض الطرق التاريخية للقسمة:

### مثال (١): (طريقة قدماء المصريين)

من المحتمل أن تكون هذه الطريقة هي أقدم الطرق على الإطلاق وكانت تعتمد على التضعيف والتصنيف ومثالاً على ذلك:

**أوجد ناتج ١٩ ÷ ٨**

نبحث عن أعداد تضرب في ٨ بحيث يكون الناتج هو ١٩ ونتبع الآتي:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ٨ | ١ | | |
| ← | ١٦ | ٢ | → | ٨ × ٢ = ١٦ |
| | ٤ | $\frac{١}{٢}$ | | |
| ← | ٢ | $\frac{١}{٤}$ | → | ٨ × $\frac{١}{٤}$ = ٢ |
| ← | ١ | $\frac{١}{٨}$ | → | ٨ × $\frac{١}{٨}$ = ١ |
| | ١٩ | ٢ $\frac{٣}{٨}$ | ← | ٢ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٨}$ |

ويكون خارج القسمة ١٩ ÷ ٨ = ٢ $\frac{٣}{٨}$

## مثال (٢): (طريقة جربرت):

تنسب إلى جربرت (٩٨٠م) وهي شبيهة بطريقة القسمة المطولة والتي تتضح من خارج قسمة ٩٠٠ ÷ ٨

وتجرى بوضع ٨ = ١٠ – ٢ وتتم كالتالي:

| | | |
|---|---|---|
| ١٠ – ٢ | ٩٠٠ | ٩٠ + ١٨ + ٣ + ١ + $\frac{٤}{٨}$ = ١١٢ $\frac{١}{٢}$ |

٩٠٠ – ١٨٠

١٨٠

١٨٠ – ٣٦

٣٦

٣٠ – ٦

٦ + ٦ = ١٢

١٠ – ٢

٢ + ٢ = ٤

والخطوات المتبعة كالآتي:

(١) تقسم ٩٠٠ ÷ ١٠ = ٩٠

(٢) نضرب ٩٠ × ١٠ = ٩٠٠ & ٩٠ × –٢ = –١٨٠

(٣) تطرح ٩٠٠ – (٩٠٠ – ١٨٠) = ١٨٠

(٤) تقسم ١٨٠ ÷ ١٠ = ١٨

(٥) تضرب ١٨ × ١٠ = ١٨٠ & ١٨ × –٢ = –٣٦

(٦) تطرح ١٨٠ – (١٨٠ – ٣٦) = ٣٦

(٧) تقسم ٣٦ ÷ ١٠ فيكون أقرب عدد صحيح ناتج هو ٣.

(٨) تضرب ٣ × ١٠ = ٣٠ & ٣ × –٢ = –٦

(٩) تطرح ٣٦ – (٣٠ – ٦) = ٦ + ٦ = ١٢

**(١٠)** تقسم ١٢ ÷ ١٠ فيكون أقرب عدد صحيح ناتج هو ١

**(١١)** تضرب ١ × ١٠ = ١٠ & ١ × –٢ = –٢

**(١٢)** تطرح ١٢ – (١٠ – ٢) = ٢ + ٢ = ٤ وهو الباقي

**(١٣)** $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

**(١٤)** بذلك يكون ناتج خارج القسمة هو ٩٠ + ١٨ + ٣ + ١ + $\frac{١}{٢}$ = $١١٢\frac{١}{٢}$

## مثال (٣): (طريقة القسمة على العوامل)

استخدمت في العصور الوسطى وتعتمد على قسمة العدد المقسوم على عوامل العدد المقسوم عليه وتبين كالتالي:

**أوجد خارج قسمة ٢١٦ ÷ ٢٤**

٢٤ = ٨ × ٣

∴ ٢١٦ ÷ ٨ = ٢٧

٢٧ ÷ ٣ = ٩

لذلك فإن:

٢١٦ ÷ ٢٤ = ٩