المحاضرتان الثانية عشر والثالثة عشر

التحليل البعدي

عرف التحليل البعدي- الأبعاد – الوحدات – وما هي الأبعاد الأساسية لميكانيكا الموائع

الحل

التحليل البعدي هو طريقة رياضية تمكننا من الحصول على أعداد لابعدية لمتغيرات مرتبطة لمسألة فيزيائية بدون معرفة المعادلة الحاكمة للمسألة الفيزيائية

البعد هو نوع لكمية فيزيائية فمثلا الكتلة والطول والزمن ودرجة الحرارة كميات فيزيائية أبعادها على الترتيب M, L, T, Θ .

الوحدة هي قيمة عددية لكمية فيزيائية فمثلا الكتلة والطول والزمن ودرجة الحرارة كميات فيزيائية وحداتها على الترتيب Kg, m, s, K .

الأبعاد الأساسية في ميكانيكا الموائع هي M, L, T, Θ .

أذكر أنواع الكميات الفيزيائية وما هي أبعادها

الكمية الفيزيائية	نوعها	رمزها	بعدها
المساحة	هندسي	A	L^2
الحجم	هندسي	V	L^3
العزم الثاني للمساحة	هندسي	I	L^4
السرعة	كينماتيكي	v	LT^{-1}
العجلة	كينماتيكي	a	LT^{-2}
الزاوية	كينماتيكي	Θ	ليس لها بعد
السرعة الزاوية	كينماتيكي	ω	T^{-1}
معدل السريان الحجمي	كينماتيكي	Q	L^3T^{-1}
معدل السريان الكتلي	كينماتيكي	$\dot{m}$	$M\,T^{-1}$
القوة	ديناميكي	F	$M\,LT^{-2}$

$M L^2 T^{-2}$	T	ديناميكي	العزم
$M L^{-1} T^{-2}$	P, τ	ديناميكي	الضغط أو الإجهاد
$M L^{-3}$	ρ	خاصية للمائع	الكثافة
$M L^{-1} T^{-1}$	μ	خاصية للمائع	اللزوجة الديناميكية
$L^2 T^{-1}$	ν	خاصية للمائع	اللزوجة الكينماتيكية

استنتج الأبعاد الأساسية للضغط واللزوجة الديناميكية واللزوجة الكينماتكية.

حيث أن الضغط يعرف بأنه القوة لوحدة المساحات فإن

$$P = \frac{Force}{Area} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

وحيث أن معامل اللزوجة الديناميكي هو الإجهاد اللازم لعمل وحدة واحدة من معدل الإنفعال فإن

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy} = \frac{Force/Area}{velocity/distance} = \frac{MLT^{-2}L^{-2}}{LT^{-1}L^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

وحيث أن معامل اللزوجة الكينماتيكي هو معامل اللزوجة الديناميكي لوحدة الكثافة فإن

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{Force/Area}{velocity/distance} / \frac{Mass}{Volum} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}$$

عرف المتغيرات التكرارية

المتغيرات التكرارية هي متغيرات مستقلة للمسألة الفيزيائية ولا تكون فيما بينها بارامترات لا بعدية وعددها يساوي عدد الأبعاد الأساسية للمسألة الفيزيائية بحيث يكون أحدهم يمثل خاصية

هندسية والثاني يمثل خاصية للمائع والثالث يمثل خاصية لسريان المائع وكل بارامتر لا بعدي يمكن تكوينه على الصورة التالية

$$\pi = (\text{متغير})(\text{تكراري} \quad \text{متغير})^{a_1}(\text{تكراري} \quad \text{متغير})^{a_2}(\text{تكراري} \quad \text{متغير})^{a_3}$$

حيث a_1, a_2, a_3 ثوابت اختيارية بحيث تجعل البارامتر π لا بعدي.

أذكر بدون برهان نظرية بكنجهام ثم أثبت أن معدل التدفق الحجمي خلال قناة يعطى بالعلاقة $Q = vD^2 f\left(\frac{\sqrt{g\,D}}{v}, \frac{H}{D}\right)$ حيث v سرعة السريان، D عمق القناة، H ارتفاع الماء في القناة، g عجلة الجاذبية الأرضية.

<u>الحل</u>

نظرية بكنجهام تنص على أنه إذا كانت المسألة الفيزيائية تتضمن n من المتغيرات المرتبطة (المتغيرات المستقلة والمتغيرات التابعة) والتي لها m من الأبعاد الأساسية فإنه يكون للمسألة الفيزيائية $(n-m)$من الأعداد اللابعدية حيث الأعداد اللابعدية يرمز لها بالرموز $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}$.

وحيث أن المتغيرات الفيزيائية للمسألة هي Q, v, D, H, g فإنه يمكن التعبير عنها بالمعادلة المتجانسة البعدية التالية

$$F(Q, v, D, H, g) = 0 \qquad (1)$$

وحيث أن المتغيرات الفيزيائية للمسألة يكون لها الأبعاد التالية

$$Q = L^3T^{-1}, v = LT^{-1}, D = L, H = L, g = LT^{-2}$$

فإن الأبعاد الأساسية للمتغيرات الفيزيائية تكون L, T وحيث أن عدد المتغيرات الفيزيائية يساوي 5 وعدد الأبعاد الأساسية يساوي 2 فإن عدد الأعداد اللابعدية يساوي 3=2-5 أي أن الأعداد اللابعدية تكون π_1, π_2, π_3 وباختيار v, D كمتغيرات تكرارية فإن الأعداد اللابعدية يمكن التعبير عنها بالصورة

$$\pi_1 = v^{a_1} D^{b_1} Q \quad (2)$$

$$\pi_2 = v^{a_2} D^{b_2} H \quad (3)$$

$$\pi_3 = v^{a_3} D^{b_3} g \quad (4)$$

وبكتابة المعادلات (4) ,(3) ,(2) في الصورة البعدية نحصل على

$$L^0 T^0 = L^{a_1+b_1+3} T^{-a_1-1} \quad (5)$$

$$L^0 T^0 = L^{a_2+b_2+1} T^{-a_2} \quad (6)$$

$$L^0 T^0 = L^{a_3+b_3+1} T^{-a_3-2} \quad (7)$$

ومن المعادلات (7) ,(6) ,(5) نحصل على

$$a_1 = -1, b_1 = -2, a_2 = 0, b_2 = -1, a_3 = -2, b_3 = 1 \quad (8)$$

وبالتعويض من (8) في (4) ,(3) ,(2) نحصل على

$$\pi_1 = \frac{Q}{vD^2} \ , \ \ \pi_2 = \frac{H}{D}, \ \pi_3 = \frac{D\,g}{v^2} \, or \, \pi_3 = \frac{\sqrt{D\,g}}{v}$$

وبذلك يمكن التعبير عن المسألة الفيزيائية بالمعادلة المتجانسة اللابعدية بالصورة

$$G(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (9)$$

ومن المعادلة (9) يمكن الحصول على

$\pi_1 = J(\pi_2, \pi_3)$ أي أن $\frac{Q}{vD^2} = J\left(\frac{\sqrt{g\,D}}{V}, \frac{H}{D}\right)$ وبالتالي فإن $Q = vD^2 J\left(\frac{\sqrt{g\,D}}{V}, \frac{H}{D}\right)$

مثال:

خزان اسطواني قطره D يصرف الماء إلى الخارج عن طريق أنبوبة قصيرة قطرها d وكان سطح الماء على بعد L فوق مستوى الأنبوبة القصيرة وكان معدل السريان الكتلي $\dot{m}$ يعتمد على الأطوال D, d, L وعجلة الجاذبية g وكثافة الماء ρ أوجد الأعداد اللابعدية للمسألة الفيزيائية.

الحل

حيث أن المتغيرات الفيزيائية للمسألة هي $\dot{m}, D, d, L, g, \rho$ فإن المسألة الفيزيائية يمكن التعبير عنها بالمعادلة المتجانسة البعدية بالصورة التالية

$$F(\dot{m}, D, d, L, g, \rho) = 0 \qquad (1)$$

وحيث أن المتغيرات الفيزيائية للمسألة يكون لها الأبعاد التالية

$$\dot{m} = M\,T^{-1}, D = L, d = L, L = L, g = LT^{-2}, \rho = M\,L^{-3} \qquad (2)$$

وحيث أنه من المعادلتين (2) ,(1) يتضح أن عدد المتغيرات الفيزيائية يساوي 6 وعدد الأبعاد الأساسية يساوي 3 فإن عدد الأعداد اللابعدية يساوي $3 - 6 = 3$

وحيث أن عدد المتغيرات التكرارية يساوي عدد الأبعاد الأساسية فإن عدد المتغيرات التكرارية يساوي 3

وباختيار المتغيرات d, g, ρ كمتغيرات تكرارية فإن الأعداد اللابعدية π_1, π_2, π_3 يمكن كتابتها على الصورة

$$\pi_1 = (d)^{a_1}(g)^{b_1}(\rho)^{c_1}\,\dot{m} \qquad (3)$$

$$\pi_2 = (d)^{a_2}(g)^{b_2}(\rho)^{c_2}\,D \qquad (4)$$

$$\pi_3 = (d)^{a_3}(g)^{b_3}(\rho)^{c_3}\ L \qquad (5)$$

وبكتابة المعادلات (5) ,(4) ,(3) في الصورة البعدية نحصل على

$$M^0\ L^0T^0 = M^{c_1+1}\ L^{a_1+b_1-3c_1}T^{-2b_1-1} \qquad (6)$$

$$M^0\ L^0T^0 = M^{c_2}\ L^{a_2+b_2-3c_2+1}T^{-2b_2} \qquad (7)$$

$$M^0\ L^0T^0 = M^{c_3}\ L^{a_3+b_3-3c_3+1}T^{-2b_3} \qquad (8)$$

وبالمقارنة في المعادلات (8) ,(7) ,(6) نحصل على

$$a_1 = -\frac{5}{2}, b_1 = -\frac{1}{2}, c_1 = -1, a_2 = -1, b_2 = 0, c_2 = 0, a_3 = -1, b_3 = 0, c_3 = 0 \qquad (9)$$

وبالتعويض من (9) في (5) ,(4) ,(3) نحصل على ، $\pi_1 = \dot{m}/\rho g^{1/2} d^{5/2},\ \pi_2 = \frac{D}{d},\ \pi_3 = \frac{L}{d}$.

عرف عدد رينولد وعدد فرويد وعدد أويلر ثم اشرح كيف يمكن صياغة معادلة نافير-استوك في الصورة اللابعدية وما عدد البارامترات اللابعدية فيها.

الحل

عدد رينولد هو النسبة بين قوة القصور إلى قوة اللزوجة ويرمز له بالرمز Re ويصاغ رياضيا على الصورة التالية

$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}$ حيث V السرعة المميزة للسريان؛ L الطول المميز للمسألة الفيزيائية؛ ν اللزوجة الكينماتيكية.

عدد فرويد هو النسبة بين قوة القصور إلى قوة الجاذبية ويرمز له بالرمز Fr ويصاغ رياضيا على الصورة التالية

$Fr = \frac{V^2}{g\,L}$ حيث V السرعة المميزة للسريان؛ L الطول المميز للمسألة الفيزيائية؛ g عجلة الجاذبية.

عدد أويلر هو النسبة بين قوة الضغط إلى قوة القصور ويرمز له بالرمز Eu ويصاغ رياضيا على الصورة التالية

$Eu = \frac{P}{\rho V^2}$ حيث P الضغط المميز للسريان؛ V السرعة المميزة للسريان؛ ρ كثافة المائع.

حيث أن معادلة نافير-استوك لمائع لزج وغير قابل للإنضغاط في الصورة الممتدية البعدية تكون

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i + F_i, \qquad (1)$$

حيث v_i مركبات السرعة؛ P الضغط؛ ρ الكثافة؛ ν اللزوجة الكينماتيكية؛ F_i مركبات القوة الخارجية.

وبفرض أن V, L, T, P, F هي السرعة والطول والزمن والضغط والقوة المميزة على الترتيب للمتغيرات في معادلة نافير-استوك ولتحويل المعادلة (1) إلى الصورة اللابعدية سوف نستخدم التحويلات الآتية

$$v_i = V\,\bar{v}_i, x_i = L\,\bar{x}_i, t = T\,\bar{t}, p = P\,\bar{p}, F_i = F\bar{F}_i \qquad (2)$$

وبالتعويض من (2) في (1) وحذف الخط الذي فوق المتغيرات نحصل على

$$\frac{V}{T}\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{V^2}{L} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{P}{\rho L}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu V}{L^2}\nabla^2 v_i + F F_i, \qquad (3)$$

وتبسيط المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{L}{VT}\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{P}{\rho V^2}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu}{VL}\nabla^2 v_i + \frac{FL}{V^2} F_i, \quad (4)$$

من المعادلة (4) يتضح أن عدد البارامترات اللابعدية أربعة وهم $\frac{L}{VT}, \frac{P}{\rho V^2}, \frac{FL}{V^2}, \frac{\nu}{VL}$

أذكر مبدأ التجانس البعدي وما أهمية هذا المبدأ ثم استنتج الأبعاد الأساسية للضغط واللزوجة الديناميكية واللزوجة الكينماتيكية.

الحل

مبدأ التجانس البعدي ينص على أن جميع الحدود المجموعة في المعادلة الفيزيائية يجب أن يكون لها نفس البعد وتكمن أهمية هذا المبدأ في معرفة صحة المعادلات الفيزيائية.

وحيث أن الضغط هو القوة لوحدة المساحة أي أن $p = \frac{F}{A}$ حيث F تمثل القوة، A تمثل المساحة. وحيث أن بعد القوة هو MLT^{-2} وبعد المساحة هو L^2 فإن بعد الضغط يكون $ML^{-1}T^{-2}$. وحيث أن اللزوجة الديناميكية هي الإجهاد القصي لوحدة معدل الإنفعال القصي أي أن $\mu = {}^{\tau}\!/\!_{\frac{du}{dy}}$ حيث τ تمثل الإجهاد القصي، $\frac{du}{dy}$ تمثل معدل الإنفعال القصي. وحيث أن بعد الإجهاد القصي هو $ML^{-1}T^{-2}$ وبعد معدل الإنفعال القصي هو T^{-1} فإن بعد اللزوجة الديناميكية يكون $ML^{-1}T^{-1}$. وحيث أن اللزوجة الكينماتيكية هي اللزوجة الديناميكية لوحدة الكثافة أي أن $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ حيث μ هي اللزوجة الديناميكية، ρ كثافة المائع. وحيث أن بعد اللزوجة الديناميكية هو $ML^{-1}T^{-1}$ وبعد الكثافة هو ML^{-3} فإن بعد اللزوجة الكينماتيكية يكون L^2T^{-1}.

<u>مثال</u>:

وضح أن انخفاض الضغط dp بسبب انسداد في أنبوب يعطى بالعلاقة $dp = \rho\, v^2 f\left(\frac{D\, v\, \rho}{\mu}\right)$ حيث D قطر الأنبوب، v السرعة، ρ كثافة الكتلة، μ اللزوجة الديناميكية للمائع.

الحل

وحيث أن المتغيرات الفيزيائية للمسألة هي dp, v, D, ρ, μ فإنه يمكن التعبير عنها بالمعادلة المتجانسة البعدية التالية

$$F(dp, v, D, \rho, \mu) = 0 \qquad (1)$$

وحيث أن المتغيرات الفيزيائية للمسألة يكون لها الأبعاد التالية

$$dp = ML^{-1}T^{-2}, v = LT^{-1}, D = L, \rho = ML^{-3}, \mu = ML^{-1}T^{-1}$$

فإن الأبعاد الأساسية للمتغيرات الفيزيائية تكون M, L, T وحيث أن عدد المتغيرات الفيزيائية يساوي 5 وعدد الأبعاد الأساسية يساوي 3 فإن عدد الأعداد اللابعدية يساوي 2=3-5 أي أن الأعداد اللابعدية تكون π_1, π_2 وبإختيار v, D, ρ كمتغيرات تكرارية فإن الأعداد اللابعدية يمكن التعبير عنها بالصورة

$$\pi_1 = v^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} dp \qquad (2)$$

$$\pi_2 = v^{a_2} D^{b_2} \rho^{c_2} \mu \qquad (3)$$

وبكتابة المعادلتين (3) ,(2) في الصورة البعدية نحصل على

$$M^0 L^0 T^0 = M^{c_1+1} L^{a_1+b_1-3c_1-1} T^{-a_1-2} \qquad (4)$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{c_{2+1}} L^{a_2+b_2-3c_2-1} T^{-a_2-1} \qquad (5)$$

ومن المعادلتين (5) ,(4) نحصل على

$$c_1 = -1, a_1 = -2, b_1 = 0, c_2 = -1, a_2 = -1, b_2 = -1 \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (3) ,(2) نحصل على

$$\pi_1 = \frac{dp}{\rho v^2} \;,\; \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}$$

وبذلك يمكن التعبير عن المسألة الفيزيائية بالمعادلة المتجانسة اللابعدية بالصورة

$$G(\pi_1, \pi_2) = 0 \qquad (7)$$

أي أن $\pi_1 = f(1/\pi_2)$ أو $\pi_1 = f(\pi_2)$ يمكن الحصول على(7)ومن المعادلة

$dp = \rho v^2 f\left(\dfrac{\rho v D}{\mu}\right)$ The resisting force F of a plane during flight can be considered as dependent upon the length of aircraft l, velocity v, air viscosity μ, air density ρ, and bulk modulus of air K. Express the functional relationship between these variables and the resisting force using dimensional analysis. Explain the physical meaning of the dimensionless groups.

Solution

The resisting force F is a function of : l, v, μ, ρ, K

Mathematically, $F = f(l, v, \mu, \rho, K)$ (1)

Or $f_1(F, l, v, \mu, \rho, K) = 0$ (2)

Total number of variables, $n = 6$

Writing dimensions of each variable, we get

$F = M\,LT^{-2}, l = L, v = LT^{-1}, \mu = M\,L^{-1}\,T^{-1}, \rho = M\,L^{-3}, K = M\,L^{-1}\,T^{-2}$

Thus number of fundamental dimensions, $m = 3$

$\therefore$ Number of $\pi -$terms $= n - m = 6 - 3 = 3$

Eqn. (2) can be written as:

$$f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (3)$$

Each $\pi -$term contains $(m+1)$ variables, where $m = 3$ and also equal to repeating variables.

Choosing l, v and ρ as repeating variables, we get three terms as

$$\pi_1 = l^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1} F, \pi_2 = l^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2} \mu, \pi_3 = l^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3} K$$

π_1-term:

$$\pi_1 = l^{a_1} v^{b_1} \rho^{c_1} F$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_1} \left(L T^{-1}\right)^{b_1} \left(M L^{-3}\right)^{c_1} M L T^{-2}$$

Equating exponents of M, L and T respectively, we get

$$\pi_1 = \frac{F}{l^2 v^2 \rho}$$

π_2-term:

$$\pi_2 = l^{a_2} v^{b_2} \rho^{c_2} \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_2} \left(L T^{-1}\right)^{b_2} \left(M L^{-3}\right)^{c_2} M L^{-1} T^{-1}$$

Equating exponents of M, L and T respectively, we get

$$\pi_2 = \frac{\mu}{l v \rho}$$

π_3-term:

$$\pi_3 = l^{a_3} v^{b_3} \rho^{c_3} K$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^{a_3} \left(L T^{-1}\right)^{b_3} \left(M L^{-3}\right)^{c_3} M L^{-1} T^{-2}$$

Equating exponents of M, L and T respectively, we get

$$\pi_3 = \frac{K}{v^2 \rho}$$

substituting the values of π_1, π_2 and π_3 in eqn. (3), we get the functional relationship as:

$$f_1\left(\frac{F}{l^2v^2\rho},\frac{\mu}{l\,v\rho},\frac{K}{v^2\rho}\right)=0$$

or $\dfrac{F}{l^2v^2\rho}=\phi\left(\dfrac{\mu}{l\,v\rho},\dfrac{K}{v^2\rho}\right)$

or $F=l^2v^2\rho\phi\left(\dfrac{\mu}{l\,v\rho},\dfrac{K}{v^2\rho}\right)$

Physical meaning of dimensionless groups (π_1,π_2,π_3)

$\pi_1=\dfrac{F}{l^2v^2\rho}$: It is the ratio of F and dynamic force $l^2v^2\rho$. It indicates that the resisting force experienced by an aircraft is dependent on the length and velocity. For any given aircraft, the resisting force will be proportional to the square of velocity.

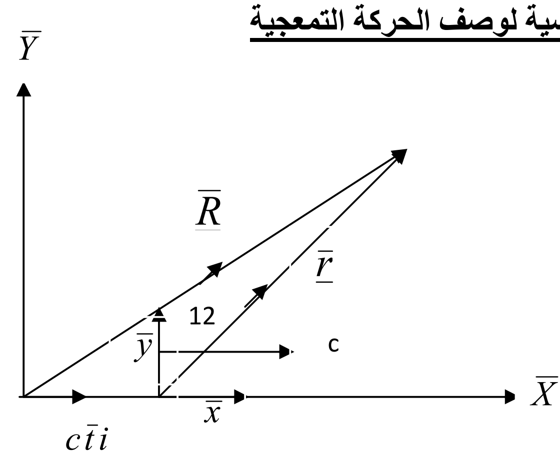
$\pi_2=\dfrac{\mu}{l\,v\rho}$: This dimensionless group is the reciprocal of Reynolds number and represents the role of viscous action on the resistance.

Peristaltic Motion الحركـــــة التمعجيـــــة

تعريف الحركة التمعجية

هي عبارة عن انتقال للموائع الفسيولوجية سواء كانت غازات أو سوائل بواسطة موجه تنتشر خلال جدار قناة أو أنبوبة مرنة ومن أمثلتها حركة البول في الحالب وحركة الغذاء المهضوم في الأمعاء وحركة الدم في الشعيرات الدموية الرقيقة.

المفاهيم الأساسية لوصف الحركة التمعجية



أ- العلاقة بين الإحداثيات الثابتة (إطار المعمل) و الإحداثيات المتحركة (إطار الموجة)

وبإستخدام قاعدة المثلث للمتجهات نجد أن

$$\underline{\bar{R}} = \underline{\bar{r}} + c\bar{t}\hat{i} \qquad \textbf{(1)}$$

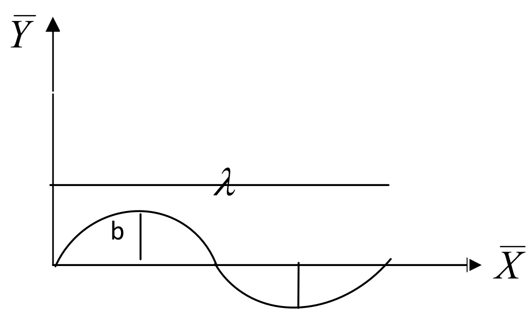
وحيث أن

$$\underline{\bar{R}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}),\ \underline{\bar{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \qquad \textbf{(2)}$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$\bar{X} = \bar{x} + c\bar{t}, \bar{Y} = \bar{y}, \bar{Z} = \bar{z} \qquad \textbf{(3)}$$

ب- إذا كان هناك موجة تنتشر بسرعة c ولـها الطول الموجى λ والسعة b فإن الدالة الموجية الجيبية توصف بالمعادلة

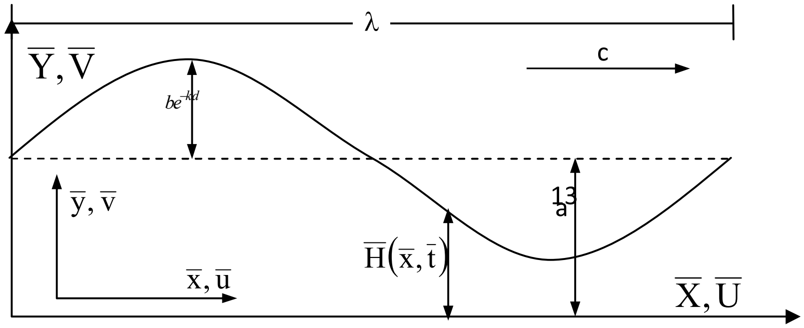


$$\bar{Y} = b\,sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(\bar{X} - c\bar{t}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

كما هو موضح بالشكل

<u>النموذج الرياضي لوصف الحركة التمعجية</u>

باعتبار الحالب (Ureter) عباره عن قناة عرضها $2a$ ويتولد على جداريها موجة جيبيه لها الطول الموجى λ والسعة b وتنتشر بسرعة c كما هو موضح بالشكل



فإن جدار الحالب يبعد عن محور $\overline{X}$ بمقدار $\overline{H}(\overline{X},\bar{t})$ حيث

$$\overline{H}(\overline{X},\bar{t}) = a + b\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\overline{X} - c\bar{t}), \quad \textbf{(5)}$$

<u>المعادلات الحاكمة لحركة السوائل اللزجة النيوتونية في الصيغة الاتجاهية هم</u>

1- معادلة الاتصال Continuity equation

$$\frac{\partial\rho}{\partial\bar{t}} + \underline{\nabla}.(\rho\underline{v}) = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

2- معادلة نافير-استوكس Navier-Stokes

$$\rho\frac{\partial\underline{v}}{\partial\bar{t}} + \rho(\underline{v}.\underline{\nabla})\underline{v} = \rho\underline{F} - \underline{\nabla}\overline{P} + \mu\nabla^2\underline{v} \quad \textbf{(7)}$$

حيث ρ هي كثافة السائل , $\underline{v}$ متجه السرعة للسائل , P الضغط للسائل , μ معامل لزوجة السائل , $\bar{t}$ الزمن.

<u>باعتبار الحالات الآتية</u>

أ- إذا كان السائل غير قابل للانضغاط (incompressible) فإن ρ= constant

ب- إذا كان سريان السائل مطرد (steady flow) فإن متغيرات السائل لا تعتمد على الزمن.

جـ- إذا كان السريان انزلاقي (creeping flow) فإن قوى القصور تهمل عند دراسة الحركة.

د- إذا كانت القوى الخارجية مهمله

باعتبار الحالات السابقة جميعا فإن معادلات الحركة تؤول إلى

$$\underline{\nabla}.\underline{v} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

$$\underline{\nabla}\overline{P} = \mu\nabla^2\underline{v} \qquad \textbf{(9)}$$

إذا كان $(\overline{u},\overline{v})$ هما مركبتي سرعة البول داخل الحالب, $\overline{P}$ هي ضغط البول داخل الحالب ,

□ معامل لزوجة البول فإن المعادلتين السابقتين يمكن كتابتهما على الصورة التالية في الإحداثيات المتحركة.

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2}\right) = \frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{x}} \qquad \textbf{(11)}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2}\right) = \frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{y}} \qquad \textbf{(12)}$$

الشروط الحدية لسريان البول داخل الحالب تكون على الصورة التالية في الإحداثيات المتحركة

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = 0, \quad \overline{v} = 0, \quad \textbf{for } \overline{y} = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

$$\overline{u} = -c, \quad \overline{v} = -c\,\frac{d\overline{H}}{d\,\overline{x}} \textbf{ for } \overline{y} = \overline{H} \qquad \textbf{(14)}$$

لجعل معادلات الحركة والشروط الحدية في الصورة اللابعدية نستخدم التحويلات الآتية

$$x = \frac{\overline{x}}{\lambda},\ X = \frac{\overline{X}}{\lambda},\ y = \frac{\overline{y}}{a},\ Y = \frac{\overline{Y}}{a},\ t = \frac{c\bar{t}}{\lambda},\ \mathrm{P} = \frac{a^2\overline{\mathrm{P}}}{c\lambda\mu},\ \mathrm{v} = \frac{\lambda\overline{\mathrm{v}}}{ac},\ \mathrm{V} = \frac{\lambda\overline{\mathrm{V}}}{ac},\ \mathrm{u} = \frac{\overline{\mathrm{u}}}{c},$$
$$\mathrm{U} = \frac{\overline{\mathrm{U}}}{c},$$

$$H=\frac{\overline{H}}{a},\ \delta=\frac{a}{\lambda},\ \phi=\frac{b}{a}$$

(15)

وبالتعويض من (15) في المعادلات (14)-(10) نحصل على معادلات الحركة والشروط الحدية في الصورة اللابعدية التالية

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \textbf{(16)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\delta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(17)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\delta^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\delta^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right), \qquad \textbf{(18)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad v=0,\quad \textbf{for}\quad y=0, \qquad \textbf{(19)}$$

$$v=-\frac{dH}{dx},\quad u=-1,\quad \textbf{for}\quad y=H, \qquad \textbf{(20)}$$

وبإستخدام تقريب الطول الموجى الطويلδ=0 تصبح معادلات الحركة على الصورة

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \textbf{(21)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \textbf{(22)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \textbf{(23)}$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$u = -\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\left(H^2 - y^2\right) - 1 \quad \textbf{(24)}$$

$$v = -\frac{1}{6}\frac{d^2P}{dx^2}\left(y^3 - 3H^2y + 2H^3\right) + \frac{dP}{dx}HH'\left(y - H\right) - H'. \quad \textbf{(25)}$$

لإيجاد الضغط نوجد العلاقة بين معدل السريان الحجمي في الإحداثيات الثابتة ومعدل السريان الحجمي في الإحداثيات المتحركة كالتالي

حيث أن معدل السريان الحجمي في الإحداثيات الثابتة معرف على الصورة

$$Q = \int_0^{\overline{H}} \overline{U}\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{t}\right) d\overline{Y}, \quad (26)$$

ومعدل السريان الحجمي في الإحداثيات المتحركة معرف على الصورة

$$\overline{q} = \int_0^{\overline{H}} \overline{u}\left(\overline{x}, \overline{y}\right) d\overline{y}, \quad \textbf{(27)}$$

وحيث أن

$$\bar{u} = \bar{U} - c, \bar{v} = \bar{V}, \quad \textbf{(28)}$$

وبالتعويض من (28) في (26) نحصل على

$$\mathrm{Q} = \bar{\mathrm{q}} + \mathrm{c}\bar{\mathrm{H}} \qquad \textbf{(29)}$$

وحيث أن المتوسط الزمني لمعدل السريان الحجمي خلال دورة T معرف على الصورة

$$\bar{Q} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} Q d\bar{t}. \qquad \textbf{(30)}$$

وبالتعويض من (29) في (30) والتكامل نحصل على

$$\bar{Q} = \bar{q} + ac \qquad \textbf{(31)}$$

وبوضع المعادلة (31) في الصورة اللابعدية نجد أن

$$\Theta = F + 1, \qquad \textbf{(32)}$$

حيث $\Theta = \dfrac{\bar{Q}}{ac}, F = \dfrac{\bar{q}}{ac}$

وحيث أن

$$\mathrm{F} = \int_{0}^{\mathrm{H}} \mathrm{u\,dy} \qquad \textbf{(33)}$$

وبالتعويض من (24) في (33) نحصل على

$$\frac{dP}{dx} = -3\frac{F + H}{H^3}. \qquad \textbf{(34)}$$

وحيث أن ضغط الامتلاء وقوة الاحتكاك عند الجدار في الصورة اللابعدية تكون على الصورة

$$\Delta P_\lambda = \int_0^1 \left(\frac{dP}{dx} \right) dx \qquad \textbf{(35)}$$

$$F_\lambda = \int_0^1 H\left(-\frac{dP}{dx} \right) dx \qquad \textbf{(36)}$$

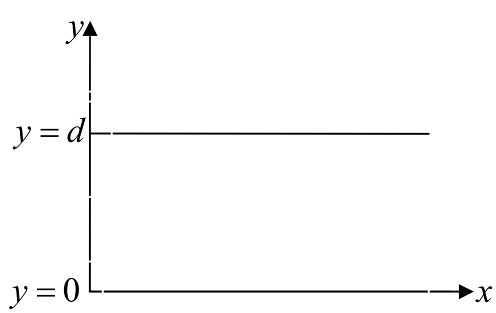
وبالتعويض من المعادلة **(34)** في المعادلتين **(35), (36)** والتكامل نحصل على

$$\Delta p_\lambda = \frac{-3\left(2+\varphi^2\right)}{2\left(1-\varphi^2\right)^{5/2}}(\Theta - 1) - \frac{3}{\left(1-\varphi^2\right)^{3/2}} \qquad \textbf{(37)}$$

$$F_\lambda = \frac{3(\Theta - 1)}{\left(1-\phi^2\right)^{3/2}} + \frac{3}{\left(1-\phi^2\right)^{1/2}} \qquad \textbf{(38)}$$

Discuss the generalized Coutte flow of a power law fluid between two parallel plates.

Solution



Let us consider a steady flow between two infinite

parallel plates situated at $y = 0$ and at $y = d$, when the plate at $y=0$ is at rest and the plate at $y=d$

is moving with velocity U. Let the velocity vector

be $\vec{v}(u(y),0,0)$. Then the strain- rate tensor $\dot{\gamma}_{ij}$ has the components

$$\dot{\gamma}_{11}=\dot{\gamma}_{22}=\dot{\gamma}_{33}=\dot{\gamma}_{13}=0,\dot{\gamma}_{12}=\tfrac{1}{2}\frac{d\,u}{d\,y}. \tag{1}$$

The momentum equations are

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{12}}{\partial y}. \tag{2}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{3}$$

From these equations we find that the pressure gradient $\frac{\partial p}{\partial x}=-P$ is constant. Therefore,

$$\tau_{12}=-P\,y+\tau_{\circ}, \tag{4}$$

Where $\tau_{\circ}$ is the value of the stress at the plate $y=0$. In this case constitutive equation becomes

$$\tau_{12}=\mu\left|\frac{du}{dy}\right|^{n-1}\frac{du}{dy}, \tag{5}$$

Since u increases from zero at $y=0$ to U at $y=d$, so $\dfrac{du}{dy}$ is positive throughout, and therefore we can take (5) as

$$\tau_{12}=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^{n}, \tag{6}$$

Substituting from (6) in (4), we have

$$\frac{du}{dy} = \mu^{-1/n}\left(-P\,y + \tau_\circ\right)^{1/n}, \tag{7}$$

$$u = -\frac{n}{n+1}\left(\frac{P}{\mu}\right)^{1/n}\left(y_\circ - y\right)^{\frac{1+n}{n}} + A, \tag{8}$$

Where $y_\circ = \frac{\tau_\circ}{P}$ and A is a constant of integration. Using the boundary conditions: $u = 0$ at $y = 0$, we find $A = \frac{n}{n+1}\left(\frac{P}{\mu}\right)^{1/n} y_\circ^{\frac{1+n}{n}}$. Thus

$$u = \frac{n}{n+1}\left(\frac{P}{\mu}\right)^{1/n}\left[y_\circ^{\frac{1+n}{n}} - \left(y_\circ - y\right)^{\frac{1+n}{n}}\right]. \tag{9}$$

Again, using the condition $u = U$ at $y = d$, we have

$$U = \frac{n}{n+1}\left(\frac{P}{\mu}\right)^{1/n}\left[y_\circ^{\frac{1+n}{n}} - \left(y_\circ - d\right)^{\frac{1+n}{n}}\right]. \tag{10}$$

This equation determines $y_\circ$ which in turn determines $\tau_\circ$. From (9) we can determine the shearing stress at plate $y = d$.