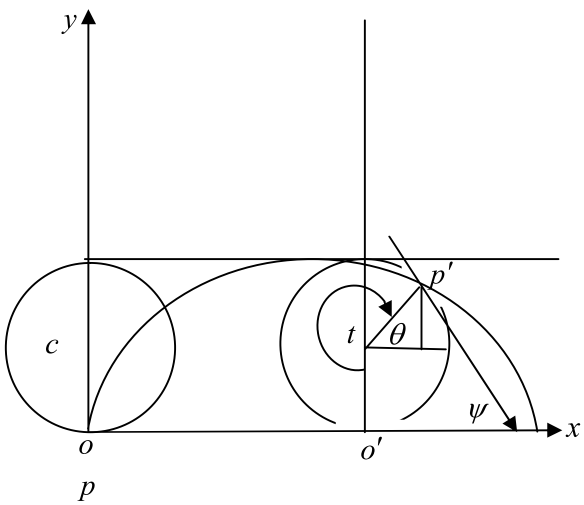
السيكلويد ومسائل محلولة

عرف السيكلويد ثم استنتج المعادلة الذاتية للسيكلويد.

الحل

السيكلويد هو المنحنى الذي ترسمه نقطة على محيط قرص نصف قطره a ويتحرك حركة تدحرجية بحته على مستقيم ثابت.

بفرض أن النقطة p والتي تقع على محيط القرص في البداية كانت منطبقة على o وبعد دوران القرص بزاويه t تحركت p حتى وصلت إلى p' وبالتالي فإن إحداثيي النقطة p' هما (x,y) حيث



$$x = o\,o' + a\cos\theta = o'\,p' + a\cos\theta = a\,t + a\cos\theta \quad (1)$$

$$y = p'r = p'c'' + a = a\sin\theta + a \quad (2)$$

ومن هندسة الشكل نجد أن $t+\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ أي أن

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t \quad (3)$$

وبالتعويض من (3) في (2) ,(1) نحصل على

$$x = a\,t - a\sin t \quad (4)$$

$$y = a - a\cos t \quad (5)$$

المعادلتان (5) ,(4) تمثلان المعادلتان البارامتريتان للسيكلويد.

ولإيجاد المعادلة الذاتية للسيكلويد نفاضل (5) ,(4) بالنسبة إلى t فنحصل على

$$\frac{dy}{dt} = a\sin t \qquad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = a - a\cos t \qquad (6)$$

وبقسمة (7) على (6) نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \cot\frac{t}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \tan(-\psi) \qquad (8)$$ ومنها نحصل على

$$t = \pi + 2\psi \qquad (9)$$ وبالتعويض من (9) في (5) ,(4) نحصل على

$$x = a\pi + 2a\psi + a\sin 2\psi \qquad (10)$$

$$y = a - a\cos 2\psi \qquad (11)$$

وبتفاضل (11) ,(10) بالنسبة إلى ψ فنحصل على

$$dx = 2a\,d\psi + 2a\cos 2\psi\,d\psi \qquad (12)$$

$$dy = 2a\sin 2\psi\,d\psi \qquad (13)$$

وبتربيع (13) ,(12) والجمع نحصل على

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = 16a^2\cos^2\psi(d\psi)^2 \qquad (14)$$ ومنها نحصل على

$$ds = 4a\cos\psi\,d\psi \qquad (15)$$ وبتكامل (15)

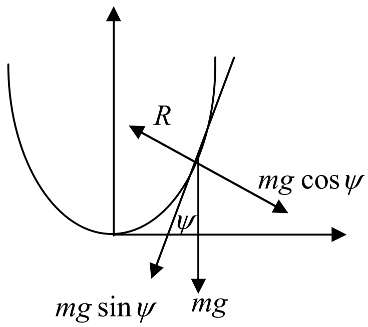
نحصل على $s = 4a\sin\psi + c_1$ حيث c_1 ثابت يعين من الشرط عند $\psi = 0$ كانت عن

كانت $s = 0$ ومنها نحصل على $c_1 = 0$ وتصبح المعادلة الذاتية للسيكلويد على الصورة

$$s = 4a\sin\psi$$

<u>مثـــال1:</u>

قذف جسيم بسرعة من ناب سيكلويد أملس محوره رأسى ورأسه إلى أسفل أثبت أن زمن الوصول إلى رأس السيكلويد يساوى $2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{4ag}{v_\circ^2}}$ حيث a نصف قطر الدائرة المولدة للسيكلويد.



الحــــل

معادلتا حركة جسيم يتحرك على منحنى سيكلويدي أملس هما

$$m\ddot{s} = -mg\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \qquad (2)$$

والمعادلة الذاتية للسيكوليد هي

$$s = 4a\sin\psi \qquad (3)$$

وبالتعويض من (3) فى (1) نحصل على

$$\ddot{s} = \frac{-g}{4a}s \qquad (4)$$

المعادلة (4) تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة حلها العام هو

$$s = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad (5)$$

حيث $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{4a}}$ ، A, B ثابتان يعينان من الشروط الابتدائية للحركة وهى عند $t = 0$ كانت

$s = 4a, \dot{s} = -v_{\circ}$ والإشارة السالبة لأن السرعة في اتجاه تناقص s ومن هذين الشرطين نحصل

على $A = 4a, B = -\dfrac{v_{\circ}}{\omega}$ وبذلك تصبح المعادلة (5) على الصورة التالية

$$s = 4a\cos\omega t - \frac{v_{\circ}}{\omega}B\sin\omega t \quad (6)$$

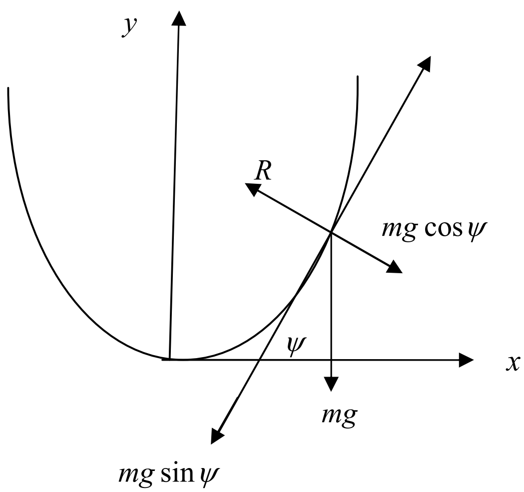
وعندما يصل الجسيم الى الرأس تكون $s = 0$ وبذلك نحصل من المعادلة (6) على

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{4ag}{v_0^{\,2}}}$$

مثال2:

أنبوبة رفيعة ملساء على شكل سيكلويد ثبتت بحيث كانت محورها راسيا و رأسها إلى أسفل قذف بداخل الأنبوبة من الرأس جسيم صغير بسرعة $3\sqrt{a\,g}$ اثبت أن هذا الجسيم ينطلق من فوهة الأنبوبة بسرعة $\sqrt{5a\,g}$.

الحل



معادلتا حركة جسيم داخل أنبوبة ملساء على شكل سيكلويد هما:

$$m\ddot{s} = -m\,g\sin\psi \qquad (1)$$

$$m\frac{\dot{S}^2}{\rho} = R - m\,g\cos\psi \qquad (2)$$

والمعادلة الذاتية للسيكلويد هي

$$S = 4a\sin\psi \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نحصل على

$$\ddot{S} = \frac{-g}{4a}S \qquad (4)$$

المعادلة (4) يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{S}\,d\,\dot{S} = \frac{-g}{4a}S\,d\,S \qquad (5)$$

بتكامل (5) نحصل على

$$\frac{\dot{S}^2}{2} = \frac{-g}{8a}S^2 + c_1 \qquad (6)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة وهى عند S=0 كانت $\dot{S} = 3\sqrt{a\,g}$ ومنها

نحصل على أن $c_1 = \frac{9}{2}ag$ وبذلك تصبح المعادلة (6) على الصورة

$$\dot{S}^2 = 9ag - \frac{9}{4a}S^2 \qquad (7)$$

ومن المعادلة (7) نحصل على أن

$$\dot{s}^2_{s=4a} = 9ag - 4ag = 5ag \quad (8)$$

$$\therefore \dot{s}\big|_{s=4a} = \sqrt{5ag} \qquad (9)$$

المعادلة (9) تمثل سرعة الانطلاق من فوهة الأنبوبة.

مثال3:

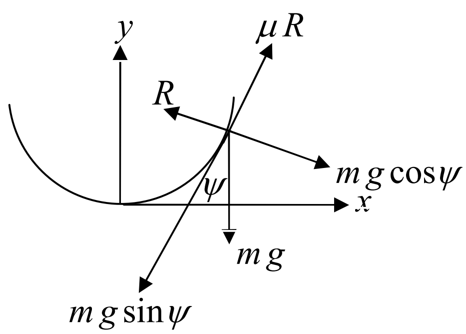
ثبت سلك سيكلويدى خشن محوره راسي ورأسه إلى أسفل إذا انزلقت حلقة على السلك مبتدئة من سكون من ناب السيكلويد و منتهية إلى سكون عند الرأس اثبت أن $\mu e^{\mu\frac{\pi}{2}} = 1$ حيث μ هو معامل الاحتكاك

الحل

من الهندسة يتضح ان الاحداثيات المناسبة لدراسة الحركة هى الاحداثيات الذاتية و بالتالى فان معادلتى حركة جسيم يكونان طبقا لقانون نيوتن الثانى على الصورتين التاليتين

$$m\ddot{s} = \mu R - mg\sin\psi \quad (1)$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (2)$$



و المعادلة الذاتية للسيكلويد هى

$$s = 4a\sin\psi \quad (3)$$

بضرب (2) فى μ والطرح من (1) نحصل على

$$\ddot{s} - \frac{\mu\dot{s}^2}{\rho} = \mu g\cos\psi - g\sin\psi \quad (4)$$

المعادلة (4) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\dot{s}^2}{d\psi} - 2\mu\dot{s}^2 = 4ag(\mu + \mu\cos 2\psi - \sin 2\psi) \quad (5)$$

المعادلة (5) تمثل معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\dot{s}^2 = -2ag + \frac{2ag}{\mu^2+1}\left[2\mu\sin 2\psi + \left(1-\mu^2\right)\cos 2\psi\right] + ce^{2\mu\psi}$$

حيث c ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة و هى $\dot{s}=0$ عند $\psi=0,\frac{\pi}{2}$ ومنها نحصل على

$$c=\frac{4a\,g\,\mu^2}{1+\mu^2} \qquad (6)$$

$$c=\frac{4a\,g\,e^{-\mu\pi}}{1+\mu^2} \qquad (7)$$

ومن المعادلتين $(6),(7)$ نحصل على

$$\mu^2=e^{-\mu\pi} \qquad (8)$$

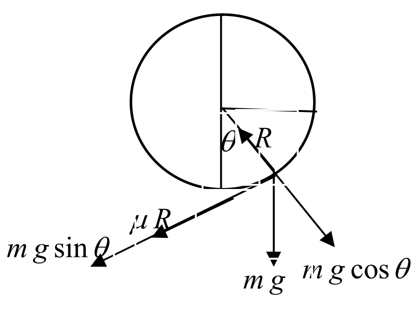
بضرب طرفى (8) فى $e^{\mu\pi}$ وأخذ الجذر التربيعي لطرفي الناتج نحصل على

$$\mu\, e^{\mu\frac{\pi}{2}}=1 \qquad (9)$$

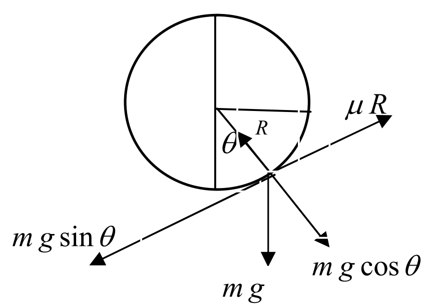
مثال4 :

تتحرك خرزة على سلك دائري خشن مثبت في مستوى رأسي. قذفت الخرزة في بدء الحركة من أسفل نقطة في السلك بسرعة v_1 تكاد تكفي لتصل الخرزة إلى القطر الأفقي للسلك. فإذا عادت الخرزة ثانية إلى أسفل موضع بسرعة v_2 فأثبت أن $\frac{v_2}{v_1}=\left(\frac{1-2\mu^2-3\mu e^{-\mu\pi}}{1-2\mu^2+3\mu e^{\mu\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$ حيث μ معامل الاحتكاك.

الحل



الحركة أثناء الصعود



الحركة أثناء الهبوط

معادلتا الحركة لخرزة تتحرك على سلك دائري خشن نصف قطره a ومثبت في مستوى رأسي أثناء الصعود هما

$$-m\,a\,\dot{\theta}^2=m\,g\cos\theta-R \qquad (1)$$

$$m\,a\,\ddot{\theta} = -m\,g\sin\theta - \mu R \qquad (2)$$

وبضرب (1) في μ والطرح من (2) نحصل على

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2 = \frac{-g}{a}(\sin\theta + \mu\cos\theta) \qquad (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 2\mu\dot{\theta}^2 = \frac{-2g}{a}(\sin\theta + \mu\cos\theta) \qquad (4)$$

والمعادلة (4) تمثل معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\dot{\theta}^2 = e^{-2\mu\theta}\left[\frac{-2g}{a}\int e^{2\mu\theta}(\sin\theta + \mu\cos\theta)d\theta + c_1\right] \qquad (5)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة وهي عند $\theta = 0$ كانت $\dot{\theta} = \frac{v_1}{a}$

وبإجراء التكامل في (5) واستخدام الشروط الإبتدائية نجد أن $c_1 = \frac{v_1^2}{a^2} + \frac{2g(2\mu^2 - 1)}{a(4\mu^2 + 1)}$ وبذلك

تصبح (5) بعد التبسيط على الصورة

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^2 = &\left(\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{2g(2\mu^2-1)}{a(4\mu^2+1)}\right)e^{-2\mu\theta} - \frac{2g}{a(4\mu^2+1)}(2\mu\sin\theta - \cos\theta) - \\ &- \frac{2\mu g}{a(4\mu^2+1)}(2\mu\cos\theta + \sin\theta)\end{aligned} \qquad (6)$$

وحيث أن سرعة القذف تكاد تكفي لتصل الخرزة إلى القطر الأفقي فإنه عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ تكون $\dot{\theta} = 0$

وبذلك نحصل من (6) على

$$v_1^2 = \frac{2ag}{4\mu^2+1}\left(1 - 2\mu^2 + 3\mu e^{\mu\pi}\right) \qquad (7)$$

وعندما تهبط الخرزة من عند القطر الأفقي حتى تصل إلى موضع القذف بسرعة v_2 تصبح

معادلتي الحركة على الصورة

$$-m\,a\,\dot{\theta}^2 = m\,g\cos\theta - R \qquad (8)$$

$$m\,a\,\ddot{\theta} = \mu R - m\,g\sin\theta \qquad (9)$$

وبضرب (8) في μ والجمع على(9) نحصل على

$$\ddot{\theta} - \mu\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(\mu\cos\theta - \sin\theta) \qquad (10)$$

المعادلة (10) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} - 2\mu\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(\mu\cos\theta - \sin\theta) \qquad (11)$$

والمعادلة (11) تمثل معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\dot{\theta}^2 = e^{2\mu\theta}\left[\frac{2\mu g}{a}\int e^{-2\mu\theta}\cos\theta\,d\theta - \frac{2g}{a}\int e^{-2\mu\theta}\sin\theta\,d\theta + c_2\right] \qquad (12)$$

حيث c_2 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة وهي عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ كانت $\dot{\theta} = 0$

وبإجراء التكامل في (12) واستخدام الشروط الإبتدائية نجد أن $c_2 = -\frac{6\mu g}{a(4\mu^2+1)}e^{-\mu\pi}$ وبذلك

تصبح (12) بعد التبسيط على الصورة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\mu g}{a(4\mu^2+1)}(\sin\theta - 2\mu\cos\theta) + \frac{2g}{a(4\mu^2+1)}(2\mu\sin\theta + \cos\theta) - \frac{6\mu g}{a(4\mu^2+1)}e^{-\mu\pi} \quad (13)$$

وحيث أنه عند $\theta = 0$ تكون $\dot{\theta} = \frac{v_2}{a}$ وبذلك نحصل من (13) على

$$v_2^2 = \frac{2ag}{4\mu^2+1}\left(1 - 2\mu^2 - 3\mu e^{-\mu\pi}\right) \qquad (14)$$

ومن المعادلتين (14) ,(7) نحصل على $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{1-2\mu^2-3\mu e^{-\mu\pi}}{1-2\mu^2+3\mu e^{\mu\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$

استنتج معادلة حركة جسيم بالنسبة لجسيم آخر في الفراغ.

نعتبر جسيمين كتلتيهما m_1, m_2 ومتجهي موضعيهما بالنسبة لنقطة ثابتة في الفراغ هما $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ومتجه موضع الجسيم m_1 بالنسبة للجسيم m_2 هو $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ وبالتالي تكون معادلتي حركة الجسيمين هما

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{21} \qquad (1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{12} \qquad (2)$$

وحيث أن عجلة الجسيم m_1 بالنسبة لعجلة الجسيم m_2 هي $\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ وبالتالي فإن معادلة حركة الجسيم m_1 بالنسبة للجسيم m_2 تكون

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{a}_1 - m_1 \vec{a}_2 \qquad (3)$$

وبالتعويض من (1) في (3) نحصل على

$$m_1 \vec{a} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{in} \qquad (4)$$

حيث $\vec{F}_{in} = -m_1 \vec{a}_2$ وحيث أن $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ فإن (4) تصبح على الصورة

$$m_1 \vec{a} = -\vec{F}_{12} - m_1 \vec{a}_2 \qquad (5)$$

وبالتعويض من (2) في (5) نحصل على

$$m_1 \vec{a} = -(m_1 + m_2)\vec{a}_2 \qquad (6)$$

وبضرب طرفي (6) في m_2 نحصل على

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{a} = -\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} \qquad (7)$$

المعادلة (7) يمكن كتابتها على الصورة

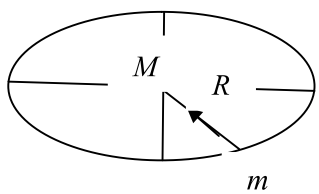
$$\mu \vec{a} = \vec{F}_{21} \qquad (8)$$

حيث $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ والمعادلة (8) تمثل معادلة حركة الجسيم m_1 بالنسبة للجسيم m_2 في الفراغ

مثال5:

خيطت خرزة كتلتها m في سلك دائري أملس نصف قطره a وكتلته M والإثنان موضوعان في سكون على منضدة أفقية ملساء إذا أعطيت الخرزة سرعة V في إتجاه المماس للسلك فأوجد رد فعل السلك على الخرزة.

الحل



حيث أن معادلتي حركة الخرزة بالنسبة للسلك هما

$$-\mu a \dot{\theta}^2 = -R \qquad (1)$$

$$\mu a \ddot{\theta} = 0 \qquad (2)$$

حيث $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$ تسمى الكتلة المختزلة لكتلتي الخرزة والسلك.

وبتكامل (2) نحصل على $\dot{\theta} = c_1$ حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة وهي

عند $\theta = 0$ كانت $\dot{\theta} = \dfrac{V}{a}$ ومنها نحصل على $c_1 = \dfrac{V}{a}$ وبذلك تصبح $\dot{\theta} = \dfrac{V}{a}$ وبالتعويض في

المعادلة (1) نحصل على رد فعل السلك على الخرزة في الصورة $R = \mu \dfrac{V^2}{a}$

مثال6 :

تنزلق حلقة صغيرة كتلتها m على سلك دائري خشن نصف قطره a مثبت في مستوى أفقي.

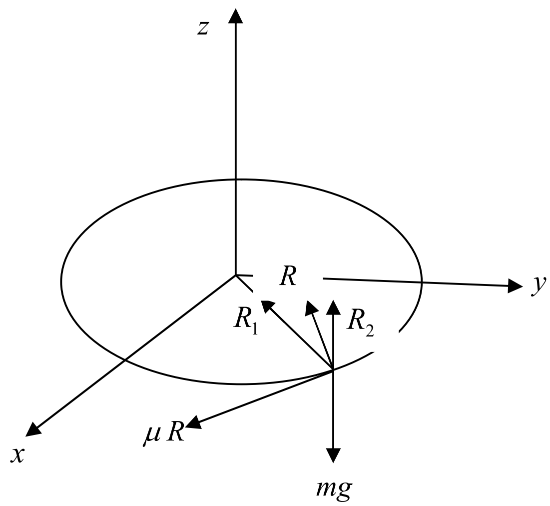
إذا قذفت الحلقة بسرعة V في إتجاه المماس أثبت أنها تسكن بعد ما تدور حول السلك زاوية

مقدارها $\frac{1}{2\mu}\sinh^{-1}\frac{V^2}{a\,g}$ حيث μ معامل الاحتكاك.

الحل

حيث أن معادلات حركة الحلقة على السلك الدائري الأفقي الخشن هي

$$-ma\dot{\theta}^2 = -R_1 \qquad (1)$$



$$m\,a\ddot{\theta} = -\mu R \qquad (2)$$

$$R_2 = -mg \qquad (3)$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad (4)$$

وبالتعويض من (3) ,(1) في (4) نحصل على

$$R = \sqrt{m^2\,a^2\,\dot{\theta}^4 + m^2\,g^2} \quad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (2) نحصل على

$$\ddot{\theta} = -\mu\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)^2 + \dot{\theta}^4} \qquad (5)$$

المعادلة (5) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)^2 + \dot{\theta}^4}} = -2\mu\,d\theta \qquad (6)$$

وبتكامل المعادلة (6) واستخدام الشرط الإبتدائي عند $\theta = 0$ كانت $\dot{\theta} = \frac{V}{a}$ نحصل على

$$\theta = \frac{1}{2\mu}\sinh^{-1}\frac{V^2}{a\,g}$$

<u>مثال</u>

أنبوبة رفيعة ملساء مثبته في مستوى رأسي على شكل قطع مكافئ محوره رأس ورأسه إلى أسفل وطول وتره البؤري العمودي يساوى $4a$. إذا بدأ جسيم كتلته m الانزلاق من السكون داخل الأنبوبة من نقطة على ارتفاع h من رأس القطع فأثبت أن مقدار ضغط الجسيم عند أي موضع يساوى $\frac{2\,m\,g\,(h+a)}{\rho}$ حيث ρ نصف قطر التقوس عند هذا الموضع.

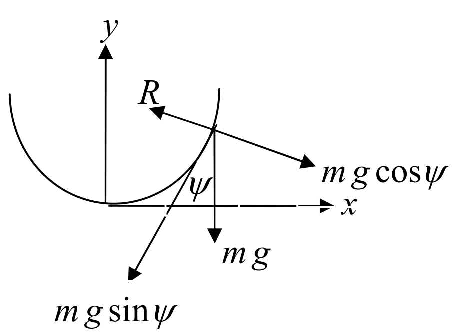
<u>الحل</u>

من الهندسة يتضح ان الاحداثيات المناسبة لدراسة الحركة هى الاحداثيات الذاتية و بالتالى فان

معادلتا حركة جسيم يتحرك في أنبوبة رفيعة ملساء مثبته في مستوى رأسي على شكل قطع

مكافئ محوره رأس ورأسه إلى أسفل هما

$$m\,\ddot{s} = -mg\sin\psi \quad (1)$$



$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = R - mg\cos\psi \quad (2)$$

و معادلة القطع المكافيء هى

$$x^2 = 4a\,y \quad (3)$$

المعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{s}\,d\,\dot{s} = -g\sin\psi\,ds \quad (4)$$

ومن هندسة الشكل نجد أن $\sin\psi\,ds = dy$ وبذلك تصبح المعادلة (4) على الصورة التالية

$$\dot{s}\,d\,\dot{s} = -g\;dy \quad (5)$$

وبتكامل المعادلة (5) نحصل على

$$\dot{s}^2 = -2g\,y + c_1 \quad (6)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشرط الابتدائي للحركة و هو $\dot{s}=0$ عند $y=h$ ومنها نحصل على

$c_1 = 2g\,h$ وبذلك تصبح (6) على الصورة التالية

$$\dot{s}^2 = 2g(h-y) \quad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (2) نحصل على

$$R = \frac{2mg(h-y) + mg\rho\cos\psi}{\rho} \quad (8)$$

وبتفاضل (3) بالنسبة إلى x نحصل على

$$x = 2a\tan\psi \quad (9)$$

وبتفاضل (9) بالنسبة إلى ψ واستخدام (9), (3) نحصل على

$$\frac{dx}{d\psi} = 2a\sec^2\psi = 2a\left(\tan^2\psi + 1\right) = 2\,(a+y) \quad (10)$$

وحيث أن

$$\rho = \frac{d\,s}{d\psi} = \frac{d\,s}{dx}\frac{d\,x}{d\psi} = \sec\psi\,\frac{d\,x}{d\psi} \Rightarrow \rho\cos\psi = \frac{d\,x}{d\psi} = 2\,(a+y) \quad (11)$$

وبالتعويض من (11) في (8) نحصل على $R = \dfrac{2m\,g(h+a)}{\rho}$ و هذا هو المطلوب إثباته.

<u>مثال1:</u>

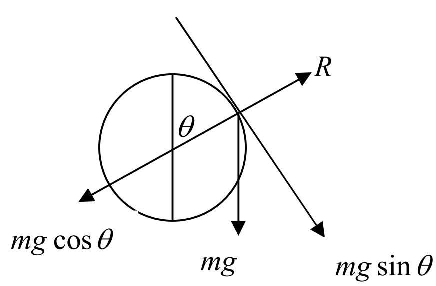
ينزلق جسيم علي السطح الخارجى لكرة ملساء مثبتة اذا بدأ الجسيم حركته من السكون عند أعلي نقطة من الكرة فأوجد سرعة الجسيم عند أي موضع و كذلك رد الفعل للكرة على الجسيم عند أي موضع ثم أوجد الموضع الذي يترك فيه الجسيم سطح الكرة.

<u>الحل</u>

معادلتا حركة جسيم علي السطح الخارجى لكرة ملساء مثبتة هما

$$-m\,a\,\dot{\theta}^2 = R - m\,g\cos\theta \quad (1)$$

$$m\,a\,\ddot{\theta} = m\,g\sin\theta \quad (2)$$



المعادلة (2) يمكن كتابتها على الصورة

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \tfrac{g}{a}\sin\theta\,d\theta \quad (3)$$

وبتكامل المعادلة (3) نحصل على

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\tfrac{g}{a}\cos\theta + c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشرط الإبتدائي للحركة وهو عند $\theta = 0$ كانت $\dot{\theta} = 0$ ومنه نحصل على

$c_1 = \dfrac{g}{a}$ وبذلك تصبح المعادلة (4) على الصورة التالية

$$\dot{\theta}^2 = \tfrac{2g}{a}\left(1-\cos\theta\right) \qquad (5)$$

ومن المعادلة (5) نحصل على سرعة الجسيم عند أي موضع على الصورة التالية

$$v = \sqrt{2ag\left(1-\cos\theta\right)} \qquad (6)$$

وبالتعويض من (5) في (1) نحصل على رد فعل سطح الكرة على الجسيم عند أي موضع في الصورة التالية

$$R = 3mg\cos\theta - 2mg \qquad (7)$$

وعندما يترك الجسيم سطح الكرة تكون $R = 0$ ومن هذا الشرط نحصل على الموضع الذي عنده يترك الجسيم سطح الكرة وهو $\theta = \cos^{-1}\dfrac{2}{3}$.

مثال 2:

تنزلق حلقه الى اسفل سلك دائرى خشن مثبت فى مستوى رأسى اذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ وبدأ الجسيم من سكون من نهايه قطر أفقى . أثبت أنه يسكن قبل أن يصل الى أسفل النقطه .

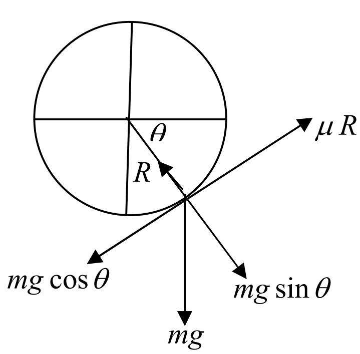
الحل:

معادلتا الحركة لحلقة تنزلق إلى أسفل سلك دائري خشن نصف قطره a ومثبت في مستوى رأسي هما

$$-ma\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - R \qquad (1)$$

$$ma\ddot{\theta} = mg\cos\theta - \mu R \qquad (2)$$

وبضرب (1) في μ والطرح من (2) نحصل على



$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) \quad (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + 2\mu\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right) \quad (4)$$

والمعادلة (4) تمثل معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\dot{\theta}^2 = e^{-2\mu\theta}\left[\frac{2g}{a}\int e^{2\mu\theta}\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right)d\,\theta + c_1\right] = e^{-2\mu\theta}\left(I_1 - I_2 + c_1\right) \qquad (5)$$

حيث $I_1 = \frac{2g}{a}\int e^{2\mu\theta}\cos\theta\,d\theta = \frac{2g}{a}e^{2\mu\theta}\left(\frac{2\mu\cos\theta + \sin\theta}{4\mu^2 + 1}\right)$ ،

$I_2 = \frac{2\mu g}{a}\int e^{2\mu\theta}\sin\theta\,d\theta = \frac{2\mu g}{a}e^{2\mu\theta}\left(\frac{2\mu\sin\theta - \cos\theta}{4\mu^2 + 1}\right)$ ،

c_1 ثابت يعين من الشرط الإبتدائي للحركة وهو عند $\theta = 0$ كانت $\dot{\theta} = 0$

وبإجراء التكامل في (5) واستخدام الشرط الإبتدائي للحركة نجد أن $c_1 = -\frac{6\mu g}{a\left(4\mu^2 + 1\right)}$ وبذلك

تصبح (5) بعد التبسيط على الصورة

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a\left(4\mu^2 + 1\right)}\left(2\mu\cos\theta + \sin\theta\right) - \frac{2\mu g}{a\left(4\mu^2 + 1\right)}\left(2\mu\sin\theta - \cos\theta\right) - \frac{6\mu g}{a\left(4\mu^2 + 1\right)}e^{-2\mu\theta} \qquad (6)$$

وحيث أن الجسيم يصل إلى أسفل نقطة عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبحساب $\dot{\theta}^2$ عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ نجد أن

$\dot{\theta}^2 = -\frac{6\mu g}{a\left(4\mu^2 + 1\right)}e^{-\mu\pi} < 0$ وهذا يعني أن الجسيم يسكن قبل أن يصل إلى أسفل نقطة. ولإيجاد

الموضع الذي يسكن عنده الجسيم نكتب معادلتي إتزان الجسيم وهما

$$R = m\,g\sin\theta \quad (7)$$

$$\mu R = m\,g\cos\theta \quad (8)$$

ومن المعادلتين (8) ,(7) نحصل على $\tan\theta = \frac{1}{\mu} = \sqrt{2}$ ومنها نحصل على موضع سكون الجسيم وهو $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$.

مثال1:

يتحرك جسيم في المستوى الديكارتي $(x - y)$ بحيث أن معادلتيه البارامتريتين هما $x = k(1-\cos\omega t), y = k(\omega t - \sin\omega t)$ حيث k,ω ثابتان، t بارامتر أوجد

1) مقدار واتجاه سرعة وعجلة الجسيم عند أي لحظة .

2) إذا كانت ϕ هي زاوية اتجاه السرعة مع المحور x ، ϕ' هي زاوية اتجاه العجلة مع نفس المحور فأثبت أن $\phi' = 2\phi$.

3) اثبت أن طاقة حركة الجسيم تعطى بالعلاقة $T = m\,a\,x$ حيث m كتلة الجسيم، a مقدار عجلته.

الحل

حيث أن الجسيم يتحرك في المستوى الديكارتي فان متجه موضعه يكون

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (1)$$

ومتجه سرعته يكون

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \quad (2)$$

ومتجه عجلته يكون

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \quad (3)$$

وحيث أن المعادلتين البارامتريتين للجسيم في المستوى الديكارتي هما

$$x = k(1-\cos\omega t),\, y = k(\omega t - \sin\omega t) \qquad (4)$$

بتفاضل (4) بالنسبة للزمن مرتين نحصل على

$$\dot{x} = k\omega\sin\omega t,\, \dot{y} = k\omega(1-\cos\omega t) \qquad (5)$$

$$\ddot{x} = k\omega^2\cos\omega t,\, \ddot{y} = k\omega^2\sin\omega t \qquad (6)$$

بالتعويض من (6),(5) فى (3) نحصل على متجهي السرعة والعجلة في الصورتين التاليتين

$$\vec{v} = k\omega\sin\omega t\,\hat{i} + k\omega(1-\cos\omega t)\,\hat{j} \qquad (7)$$

$$\vec{a} = k\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} + k\omega^2\sin\omega t\,\hat{j} \qquad (8)$$

ومن المعادلتين (8) ,(7) نحصل على أن مقدار السرعة و مقدار العجلة كالتالي

$$|\vec{v}| = k\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)} \qquad (9)$$

$$|\vec{a}| = k\omega^2 \qquad (10)$$

وحيث أن ϕ هي زاوية اتجاه السرعة مع المحور x فإن

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1-\cos\omega t}{\sin\omega t} = \frac{2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}} = \tan\frac{\omega t}{2} \qquad (11)$$

ومن المعادلة (11) نحصل على أن

$$\phi = \frac{\omega t}{2} \qquad (12)$$

وحيث أن ϕ' هي زاوية اتجاه العجلة مع محور x فان

$$\tan\phi' = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = \tan\omega\, t \qquad (13)$$

ومن المعادلة (13) نحصل على أن

$$\phi' = \omega t \qquad (14)$$

ومن المعادلتين (14),(12) نحصل على أن

$$\phi' = 2\phi \quad (15)$$

وحيث أن طاقة حركة الجسيم تعين من العلاقة

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (16)$$

وبالتعويض من (9) في (16) واستخدام (4) نحصل على أن

$$T = m\,a\,x \qquad (17)$$

مثال2:

جسيم كتلته m يتحرك خلال مسار معادلتيه البارامتريتين هما $x = x_\circ \cos\omega_1 t, y = y_\circ \sin\omega_2 t$

حيث $x_\circ, y_\circ, \omega_1, \omega_2$ ثوابت، t بارامتر أوجد

(أ) مركبتي القوة وما هو شرط أن تكون القوة مركزية.

(ب) طاقة الجهد للجسيم كدالة في x, y.

(جـ) طاقة حركة الجسيم ثم أثبت أن الطاقة الكلية للجسيم ثابتة.

الحل

(أ) حيث أن المعادلتين البارامتريتين لمسار الجسيم هما

$$x = x_\circ \cos\omega_1 t, y = y_\circ \sin\omega_2 t \qquad (1)$$

وبتفاضل المعادلتين في (1) مرتين بالنسبة للبارامتر t نحصل على مركبتين العجلة للجسيم على الصورتين التاليتين

$$\ddot{x} = -\omega_1^2\, x_\circ \cos\omega_1 t, \ddot{y} = -\omega_2^2\, y_\circ \sin\omega_2 t \qquad (2)$$

ومن قانون نيوتن الثاني واستخدام (1) نحصل على مركبتي القوة المؤثرة على الجسيم في الصورتين التاليتين

$$F_x = m\ddot{x} = -m\omega_1^2 x_\circ \cos\omega_1 t = -m\omega_1^2 x, \qquad (3)$$
$$F_y = m\ddot{y} = -m\omega_2^2 y_\circ \sin\omega_2 t = -m\omega_2^2 y$$

وبالتالي يكون متجه القوة المؤثرة على الجسيم في الصورة التالية

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} = -m\omega_1^2 x\hat{i} - m\omega_2^2 y\hat{j} \qquad (4)$$

وشرط أن تكون القوة $\vec{F}$ قوة مركزية هو $\omega_1 = \omega_2$ وذلك لأنه في هذه الحالة تكون القوة $\vec{F}$ على الصورة التالية

$$\vec{F} = -m\omega_1^2\left(x\hat{i} + y\hat{j}\right) = -m\omega_1^2\,\vec{r} \qquad (5)$$

(ب) ولايجاد طاقة الجهد V للجسيم نستخدم العلاقة بين القوة المحافظة $\vec{F}$ وطاقة الجهد V وهي

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \qquad (6)$$

والمعادلة (6) يمكن كتابتها في الصورة التالية

$$F_x = -m\omega_1^2 x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -m\omega_2^2 y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (7)$$

وبفصل المتغيرات للمعادلات في (7) والتكامل نحصل على

$$V = \frac{1}{2}m\omega_1^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 y^2 + c \qquad (8)$$

حيث c ثابت يمكن اختياره صفر عند نقطة الأصل وبذلك تكون طاقة الجهد للجسيم كدالة في x, y على الصورة التالية

$$V = \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2\right) \qquad (9)$$

(جـ) ولإيجاد طاقة الحركة للجسيم نعلم أن طاقة الحركة للجسيم تعين من العلاقة

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \qquad (10)$$

وبتفاضل المعادلتين في (1) بالنسبة للبارامتر t نحصل على مركبتين السرعة للجسيم على الصورتين التاليتين

$$\dot{x} = -\omega_1 x_\circ \sin \omega_1 t, \dot{y} = \omega_2 y_\circ \cos \omega_2 t \qquad (11)$$

وبالتعويض من (11) في (10) نحصل على طاقة الحركة للجسيم في الصورة التالية

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 x_\circ^2 \sin^2 \omega_1 t + \omega_2^2 y_\circ^2 \cos^2 \omega_2 t \right) \qquad (12)$$

وحيث أن الطاقة الكلية للجسيم(E) = طاقة الحركة للجسيم(T) + طاقة الجهد للجسيم(V) فإن

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 x_\circ^2 \sin^2 \omega_1 t + \omega_2^2 y_\circ^2 \cos^2 \omega_2 t \right) + \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 x_\circ^2 \cos^2 \omega_1 t + \omega_2^2 y_\circ^2 \sin^2 \omega_2 t \right) \qquad (13) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\omega_1^2 x_\circ^2 + \omega_2^2 y_\circ^2 \right) = cons. \end{aligned}$$

ويتضح من المعادلة (13) أن الطاقة الكلية للجسيم ثابتة.