المحاضرة ٦

المحاضرة السادسة : طرق التكامل:

١. التكامل باستخدام الكسور الجزئية:

تستخدم الكسور الجزئية لاعادة كتابة الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ كمجموع من الكسور الابسط وبالتالى يتحول التكامل $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ الى مجموع عدد من التكاملات الابسط والاسهل فى التعامل.

قواعد تحليل الكسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ الى كسور جزئية:

الحالة الاولى: درجة $p(x)$ أقل من درجة $Q(x)$:

١- كل عامل خطى $(ax+b)$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئى :

$$\frac{\alpha}{ax+b}$$

حيث α مقدار ثابت.

٢- كل عامل من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل $(ax^2+bx++c)$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسر جزئى:

$$\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$$

حيث α،β مقادير ثابتة.

٣- كل عامل خطى مكرر $(ax+b)^2$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسران جزئيان:

$$\frac{\alpha}{ax+b}+\frac{\beta}{(ax+b)^2}$$

حيث α،β مقادير ثابتة.

٤- كل عامل مكرر من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل $(ax^2+bx++c)^2$ للدالة $Q(x)$ يقابله كسران جزئيان:

$$\frac{\alpha_1 x+\beta_1}{ax^2+bx+c}+\frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(ax^2+bx+c)^2}$$

حيث α_1،β_1،α_2 ،β_2 مقادير ثابتة.

٥- كل عامل خطى مكررثلاث مرات $(ax+b)^3$ للدالة $Q(x)$ يقابله ثلاث كسور جزئية:

$$\frac{\alpha}{ax+b}+\frac{\beta}{(ax+b)^2}+\frac{\gamma}{(ax+b)^3}$$

حيث α،β،γ مقادير ثابتة.

<u>الحالة الثانية :</u> درجة $p(x)$ أكبر من او تساوى درجة $Q(x)$:

١- إذا كانت درجة $p(x)$ تساوى درجة $Q(x)$ فاننا نضيف ثابت α الى الكسورالجزئية الموجودة فى الحالة الاولى.

٢- إذا كانت درجة $p(x)$ أعلى بمقداردرجة واحدة من درجة $Q(x)$ فاننا نضيف المقدار $\alpha x+\beta$ الى الكسورالجزئية الموجودة فى الحالة الاولى.

٣- إذا كانت درجة $p(x)$ أعلى بمقداردرجتين من درجة $Q(x)$ فاننا نضيف المقدار $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$الى الكسورالجزئية الموجودة فى الحالة الاولى.

أو استخدام القسمة المطولة.

<u>طرق تعيين الثوابت:</u>

تساوى الكسر $\frac{p(x)}{Q(x)}$ بمجموع الكسور الجزئية المقابلة له كما سبق الحصول عليها ثم نضرب المتساوية فى $Q(x)$ وبذلك نحصل على متساوية جديدة . يمكن عندئذ الحصول على الثوابت من هذه المتساوية الجديدة وذلك باستخدام الطرق الاتية:

١- نعطى قيمة مناسبة للمتغيرx.

٢- نساوى المعادلات المتناظرة فى الطرفين مع البدء بالحدود المشتملة على أعلى قوة للمتغير x .

<u>مثال١:</u> أوجد قيمة:

المحاضرة ٦

$$\int \frac{2x-1}{\mathrm{x}^2(\mathrm{x}-1)}\,\mathrm{dx}$$

الحل: **نستخدم الكسور الجزئية أولا ثم نحسب ناتج التكامل :**

درجة البسط اقل من درجة المقام لذلك نستخدم الحالة الاولى كما ان x^2 قوس مكررمرتين من الدرجة الاولى:

$$\frac{2x-1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}$$
$$= \frac{a(x-1) + bx(x-1) + cx^2}{x^2(x-1)}$$

بضرب الطرفين فى المقدار $x^2(x-1)$ نحصل على

$$2x-1 = a(x-1) + bx(x-1) + cx^2 \qquad (1)$$

لحساب الثوابت:

بوضع $x = 1$ في المعادلة (١) نحصل على $c = 1$

بوضع $x = 0$ في المعادلة (١) نحصل على $a = 1$

بمساواة معاملات x^2 نحصل على $b = -1$ $\quad b + c = 0 \rightarrow$

مما سبق نحصل على

$$\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$
$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \ln|x-1| + c$$

مثال٢:

$$I = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

الحل: بتحليل الكسر الى كسور جزئية نحصل على:

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

ومن ثم

$$I = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = -\ln(x) + \ln(x-1) + c$$

$$= \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + c$$

مثال ٣: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

الحل: بتحليل الكسر الى كسور جزئية نحصل على:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

ومن ثم

$$I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + c$$

مثال ٤: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{(x+5)}{x^2+x-2}dx$$

الحل: بتحليل الكسر الى كسور جزئية نحصل على:

$$\frac{(x+5)}{(x+2)(x-1)} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1}$$

وبالتالى

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1}\right)dx$$

$$= -\int \frac{1}{x+2}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$= -\ln(x+2) + 2\ln(x-1) + c$$

$$= \ln\left(\frac{(x-1)^2}{x+2}\right) + c$$

مثال ٥: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2(1+x)}dx$$

الحل:

$$I = \int \frac{x^4}{x^2(1+x)}dx + \int \frac{x+1}{x^2(1+x)}dx$$

$$= \int \frac{x^2}{(1+x)}dx + \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{(x+1-1)^2}{(1+x)}dx + \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{(1+x)}dx + \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \int (x+1)dx - 2\int dx + \int \frac{1}{(1+x)}dx + \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} - 2x + \ln(x+1) - \frac{1}{x} + c$$

المحاضرة ٦

التعويضات الكسرية:

بعض المقادير المكاملة يمكن أن تتحول إلى مقادير كسرية يمكن تكاملها باستخدام الكسور الجزئية أو الطرق الاخرى، وخاصة اذا كانت تحتوى على مقدار على الصورة $(a+bx)^{\frac{1}{n}}$ حيث a،b، ثوابت فاننا نستخدم التعويضة $u=(a+bx)^{\frac{1}{n}}$ كما في الامثلة الاتية:

مثال١:

$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

الحل:

نضع $u=\sqrt{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad u^2=x^2-4 \quad 2udu=2xdx$

$$\therefore I=\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

$$=\int \frac{(u^2+4)u}{u}du=\int (u^2+4)du=\frac{u^3}{3}+4u+c$$

$$\therefore I=\frac{1}{3}u(u^2+12)+c=\frac{1}{3}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+c$$

مثال٢:

$$I=\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx$$

الحل:

سنحاول التخلص من الجذر التربيعى باستخدام التعويض:

$$u=\sqrt{x+1} \quad \Rightarrow u^2=x+1، \quad x=u^2-1 \quad 2udu=dx$$

$$I=\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}dx=\int \frac{2udu}{(u^2+1)u}=\int \frac{2dt}{(u^2+1)}$$

$$=2\,tan^{-1}u+c=2\,tan^{-1}\sqrt{x+1}+c.$$

مثال ٣: أوجد قيمة:

$$I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

الحل: بوضع $u = \sqrt{x+1}$ نجد ان $u^2 = x + 1$ ومن ثم

$$2udu = dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{u}{u^2 - 1} 2udu$$

$$= 2\int \frac{u^2}{u^2-1} du = 2\int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} du$$

$$= \int \left(2 + \frac{2}{u^2 - 1}\right) du$$

$$= \int \left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= 2u + \ln(u - 1) - \ln(u + 1) + c$$

$$= 2u + \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + c$$

$$= 2\sqrt{x+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1}\right) + c$$

مثال ٤: احسب التكامل:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$$

الحل: بوضع $x = u^6$ نجد ان $dx = 6u^5$ ومن ثم

$$I = \int \frac{1}{u^3 - u^2} 6u^5 du = 6\int \frac{u^3}{u-1} du$$

$$= 6\int\left(\frac{(u^3-1)+1}{u-1}\right)du$$

$$= 6\int\left(\frac{(u-1)(u^2+u+1)+1}{u-1}\right)du$$

$$= 6\left(\int (u^2+u+1)du + \int \frac{1}{u-1}du\right)$$

$$= 6\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+u+\ln(u-1)\right)+c$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right]+c$$

تمارين:

أوجد التكاملات الاتية:

1. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$
2. $\int \frac{x^3}{x^3+1}dx$
3. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$