خواص التكاملات:

إذا كانت $g(z), f(z)$ دالتين قابلتين للتكامل على C فإن:

١. $\int_C \{f(z)+g(z)\}dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$

٢. $\int_C Af(z)dz = A\int_C f(z)dz$ حيث A ثابت.

٣. $\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$

٤. $\int_a^b f(z)dz = \int_a^c f(z)dz + \int_c^b f(z)dz$ حيث c, b, a نقاط على المنحنى.

٥. $\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$ حيث $|f(z)| \le M$ أي M هي حد أعلى لـ $|f(z)|$ على المنحنى C، L هو طول المنحنى C.

برهان الخاصية (٥):

من تعريف التكاملات الخطية فإن:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{z=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \qquad (1)$$

اي أن:

$$\left|\sum_{z=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{z=1}^{n}|f(\xi_k)||\Delta z_k| \le M\sum|\Delta z_k| \le ML \qquad (2)$$

حيث استخدمنا حقيقة أن $|f(z)| \le M$ لكل النقاط z على المنحنى C وأن $\sum_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$ تمثل مجموع أطوال الأوتار التي تصل النقاط z_k, z_{k-1} حيث $k = 1, 2, \ldots, n$ وأن هذا المجموع لا يزيد على طول المنحنى C.

وبأخذ النهاية لكل من الطرفين في المعادلة (2) وباستخدام (1) فإنه ينتج المطلوب.

من الممكن أن نمهد ذلك بأن نثبت أن $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$.

مثال : اثبت ان $\left|\int_C \frac{dz}{z^2-1}\right| \le \frac{\pi}{3}$

حيث C جزء الدائرة $|z| \le 2$ الموجود فى الربع الاول من المستوى Z .

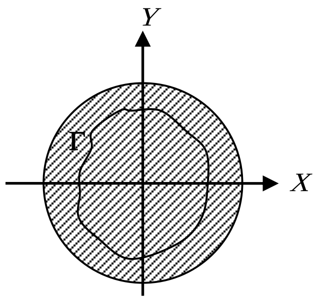
الحل:حيث ان $|z^2-1| \ge |z|^2 - 1 \le 4-1 = 3$

وطول ربع الدائرة $|z| \le 2$ يساوى π

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2-1}\right| \le \frac{\pi}{|z|^2-1} = \frac{\pi}{3}.$$

المناطق البسيطة ومتعددة الترابط:

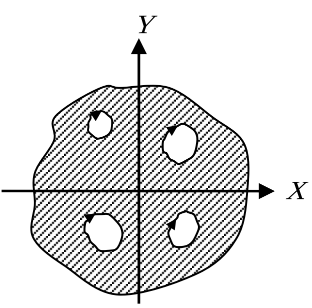
تسمى منطقة ما R بأنها بسيطة الترابط إذا كان أي منحنى بسيط مقفل يقع في R يمكن أن يؤول إلى نقطة بدون أن يترك المنطقة R وإذا كانت منطقة ما ليست بسيطة الترابط فإنه يقال أنها متعددة الترابط.



شكل (٢-٥)

على سبيل المثال. افرض أن R هي المنطقة المعرفة $|z| \le 2$ المظللة في شكل (٢-٥). إذا كان Γ هو أي منحنى بسيط مقفل في R (أي كل نقاطه تقع في R) فإننا نرى أنه يمكن أن يؤول إلى نقطة والتي تقع في R وبالتالي لا يترك R. إذن المنطقة R بسيطة الترابط. وعلى عكس ذلك إذا كانت R هي المنطقة المعرفة بـ $1 < |z| < 2$ الموجودة في شكل (٥-٣) فإنه يوجد منحنى بسيط مقفل Γ يقع في R ومن المتعذر أن يؤول إلى نقطة بدون أن يترك R وبالتالي المنطقة R متعددة الترابط.

ومن البديهي المنطقة البسيطة الترابط هي المنطقة التي لا تحوي فجوات بداخلها بينما المنطقة المتعددة الترابط هي التي تحوي فجوات بداخلها كما في شكل (٤-٥).



شكل (٤-٥)

الاتفاق عن إشارة اتجاه عبور مسار مقفل:

يقال أن حد المنحنى C المحدد لمنطقة يعبر في الاتجاه الموجب إذا سار مراقباً في هذا الاتجاه وعمودياً على المستوى ووقعت المنطقة على اليسار. يؤدي هذا الاتفاق إلى الاتجاهات المبينة بالأسهم في الأشكال.

نستخدم المصطلح الخاص $\oint_C f(z)\,dz$ للتعبير عن تكامل $f(z)$ حول المنحنى المغلق C في الاتجاه الموجب.

ويلاحظ أن الاتجاه الموجب هو عكس دوران عقارب الساعة، يسمى غالباً التكامل حول C بالتكامل حول منحنى مقفل (كونتور).

نظرية كوشي – نظرية كوشي جورسات:

لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما R وكذلك على حدها C فإن:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

هذه النظرية الأساسية، تسمى غالباً بنظرية كوشي للتكامل أو باختصار نظرية كوشي، وهي تتحقق لكل من المناطق البسيطة والمتعددة الترابط. وقد برهنت أولاً باستخدام نظرية جرين مع قيد إضافي هو أن $f'(z)$ متصلة في R. وقد أعطى جورسات برهاناً بدون هذا القيد الإضافي. ولهذا السبب فإن النظرية تسمى في بعض الأحيان بنظرية كوشي جورسات عندما يؤكد على عدم ضرورة هذا القيد.

نظرية جرين في المستوى:

نفرض أن $Q(x,y), P(x,y)$ دالتان متصلتان وأن مشتقاتهما الجزئية متصلة في منطقة R وعلى حدها C تنص نظرية جرين على:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

والنظرية صحيحة لكل من المناطق البسيطة والمتعددة الترابط.

نظرية كوشي ونظرية كوشي – جورسات:

إذا كانت $f(z)$ تحليلية والمشتقة $f'(z)$ متصلة عند جميع النقاط داخل وعلى المنحنى البسيط المقفل C فإن $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

البرهان:

بما أن $f(z) = U + iV$ تحليلية ومشتقاتها متصلة فإن

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

وعلى ذلك فإن المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$

متصلة داخل وعلى المنحنى C.

يمكن تطبيق نظرية جرين فيكون لدينا

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (U+iV)(dx+idy)$$
$$= \oint_C (Udx - Vdy) + i\oint_C (Vdx + Vdy)$$
$$= \iint_R (-V_x - U_y)\,dxdy + i\iint_R (U_x - V_y)\,dxdy$$

وذلك باستخدام معادلة كوشي ريمان (1), (2) باستخدام حقيقة أنه يمكن تطبيق نظرية جرين على المناطق متعددة الترابط، فإنه يمكن تعميم النتيجة المتعددة الترابط تحت الشروط المعطاه للدالة f (z).

مثال:

برهن أن:

$$\text{(i)}\ \oint_C z\,dz = 0 \qquad \text{(ii)}\ \oint_C dz = 0 \qquad \text{(iii)}\ \oint_C (z - z_0)\,dz = 0$$

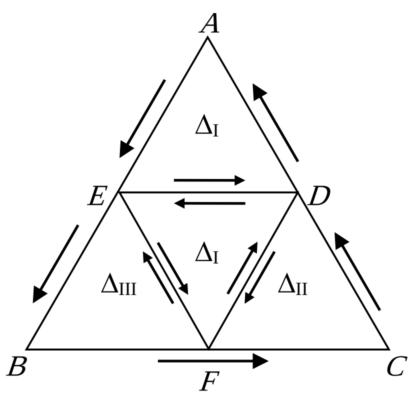
حيث C هو أي منحنى بسيط مقفل و z_0 هو ثابت ما.

الحل:

تنتج هذه التائج مباشرة من نظرية كوشي حيث أن الدوال $z - z_0$, 1, z تحليلية داخل المنحنى C ولها مشتقات متصلة.

نظرية كوشي – جورسات (في حالة المثلث):

اعتبر أي مثلث ABC في المستوى Z نرمز لهن باختصار بالرمز Δ في شكل (٥–٤) نصل نقاط منتصف الأضلاع وهي F, E, D للأضلاع BC, AB, AC على التوالي تكون أربع مثلثات نرمز لها باختصار $\Delta_{IV}, \Delta_{III}, \Delta_{II},$ Δ_I.



شكل ( )

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المثلث ABC وداخله فيكون

$$\oint_{ABCA} f(z)dz = 0$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{DAE} f(z)dz + \int_{EBF} f(z)dz + \int_{FCD} f(z)dz \\
&= \left\{ \int_{DAE} f(z)dz + \int_{EDF} f(z)dz \right\} \\
&+ \left\{ \int_{EBF} f(z)dz + \int_{FE} f(z)dz \right\} \\
&+ \left\{ \int_{FCD} f(z)dz + \int_{DF} f(z)dz \right\} \\
&+ \left\{ \int_{DE} f(z)dz + \int_{EF} f(z)dz + \int_{FD} f(z)dz \right\} \\
&= \int_{DAED} f(z)dz + \int_{EBFE} f(z)dz + \int_{FCDF} f(z)dz + \int_{DEFD} f(z)dz \\
&= \oint_{\Delta_{\mathrm{I}}} f(z)dz + \oint_{\Delta_{\mathrm{II}}} f(z)dz + \oint_{\Delta_{\mathrm{III}}} f(z)dz + \oint_{\Delta_{\mathrm{IV}}} f(z)dz
\end{aligned}$$

حيث استخدمنا حقيقة أن:

$$\int_{ED} = -\int_{DE} \;,\; \int_{FE} = -\int_{EF} \;,\; \int_{DF} = -\int_{FD}$$

وبالتالي:

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \le \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{I}}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{II}}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{III}}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{\mathrm{IV}}} f(z)dz\right| \quad (1)$$

ليكن Δ هو المثلث المناظر للحد الذي في الطرف الأيمن في (1) وله أكبر قيمة

$$\therefore \left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \le 4\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| \qquad (2)$$

إذا وصلنا نقاط منتصف أضلاع المثلث Δ_1 فنحصل بالمثل على مثلث Δ_2 بحيث

$$\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| \le 4\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| \qquad (3)$$

وبالتالي

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \le 4^2\left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right| \qquad (4)$$

بعد n من الخطوات نحصل على مثلث Δ_n بحيث

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)dz\right| \le 4^n\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right| \qquad (5)$$

المثلثات $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ هي متوالية مثلثات كل واحدة منها محتوي في الذي قبله وتوجد نقطة z_0 تقع داخل كل مثلث من المتوالية.

بما أن z_0 تقع داخل أو على حد Δ، فيلي ذلك أن $f(z)$ تحليلية عند z_0. إذن

$$f = f(z_1) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0) \qquad (6)$$

حيث يوجد عدد موجب δ بحيث أن $|\eta| < \varepsilon$ طالما $|z - z_0| < \delta$ لأي عدد موجب ε. إذن بتكامل طرفي المعادلة (6) واستخدام حقيقة أن

$$\oint_C dz = 0, \qquad \oint_C (z - z_0)\,dz = 0$$

حيث C أي منحنى مقفل، z_0 ثابت. نحصل على:

$$\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)\,dz \qquad (7)$$

إذا كان P هو محيط Δ فإن محيط Δ_n هو $P_n = \dfrac{P}{2^n}$

إذا كانت z أي نقطة على Δ_n يجب أن يكون $|z - z_0| < \dfrac{P}{2^n} < \delta$ كما هو موضح في الشكل، وعلى ذلك ينتج من المعادلة (7)

$$\left|\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)\,dz\right|$$

$$\le \varepsilon . \frac{P}{2^n} . \frac{P}{2^n} = \frac{\varepsilon P^2}{4^n}$$

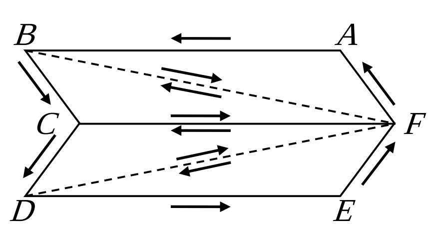
وبالتالي تصبح المعادلة (5)

$$\left|\oint_{\Delta} f(z)\,dz\right| \le 4^n \frac{\varepsilon P^2}{4^n} = \varepsilon P^2$$

وحيث أنه يمكن جعل ε صغيرة بأي درجة نريد، فإن

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 .$$

<u>نظرية كوشي – جورسات (لأي مضلع مقفل):</u>



نعتبر المضلع المقفل $ABCDEFA$ كما هو مبين في شكل (٦–٤)

<u>برسم الخطوط DF, CF, BF ينقسم المضلع إلى مثلثات. إذن من نظرية كوشي للمثلثات</u>

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 .$$

نظرية كوشي – جورسات (لأي منحنى بسيط مقفل):

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منطقة R وعلى حدها المنحنى البسيط فإن

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

البرهان:

نختار n من النقاط $z_1, z_2, \ldots, z_n$ على المنحنى C (شكل (٧–٤)) وللاختصار سنعتبر $z_0 = z_n$

ننشئ المضلع P بتوصيل هذه النقاط لنعرف المجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\,\Delta z_k$$

حيث

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

وبما أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \oint_C f(z)\,dz$$

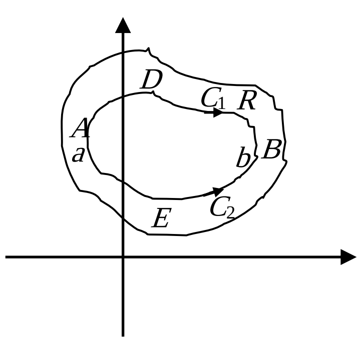
حيث النهاية على الطرف الأيسر تعني أن $n \to \infty$ عندما يؤول أكبر من $|\Delta z_k|$ إلى الصفر.

وبإثبات أن $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ نكون قد أثبتنا المطلوب.

نتائج نظرية كوشي:

نظرية (١):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة R بسيطة الترابط فإن $\int_a^b f(z)\,dz$ لا يعتمد على المسار الذي يصل إلى نقطتين في R.



البرهان:

من نظرية كوشي

$$\int_{ADBEA} f(z)\,dz = 0$$

أو

$$\int_{ADB} f(z)\,dz + \int_{BEA} f(z)\,dz = 0$$

وبالتالي:

$$\int_{ADB} f(z)dz = -\int_{BEA} f(z)dz = \int_{AEB} f(z)dz$$

إذن

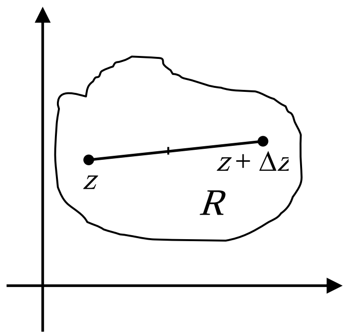
$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz \ .$$

نظرية (٢):

لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة R بسيطة الترابط ، z, a نقطتان في R فإن:

(أ) $F(z) = \int_a^z f(u)du$ تحليلية في R.

(ب) $F'(z) = f(z)$.



البرهان:

لدينا

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left\{ \int_z^{z+\Delta z} f(u)du - \int_z^z f(u)du \right\} - f(z)$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}\{f(u) - f(z)\}du \qquad (1)$$

من نظرية كوشي، التكامل الأخير لا يعتمد على المسار الذي يصل $z + \Delta z, z$ طالما أن المسار في R. وعلى وجه الخصوص يمكن أن نختار كمسار جزء الخط المستقيم الذي يصل $z + \Delta z, z$ (شكل ٤–٩) بشرط أن نختار $|\Delta z|$ صغيرة صغراً كافياً بحيث أن المسار يقع في R. وعلى وجه الخصوص يمكن أن نختار كمسار جزء الخط المستقيم الذي يصل $z + \Delta z, z$ (شكل ٤–٩) بشرط أن نختار $|\Delta z|$ صغيرة صغراً كافياً بحيث أن المسار يقع في R.

بما أن الدالة $f(z)$ متصلة، فلكل النقاط u على مسار هذا الخط المستقيم يكون $|f(u) - f(z)| < \varepsilon$ طالما $|u - z| < \delta$ ويكون هذا صحيح إذا كانت $|\Delta z| < \delta$ يلي ذلك أن

$$\left| \int_z [f(u) - f(z)]dz \right| < \varepsilon |\Delta z| \qquad (2)$$

وبالتالي من (1)

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\{f(u)-f(z)\}du\right|$$

$$<\varepsilon$$

لكل $|\Delta z| < \delta$ وهذا يعني أن

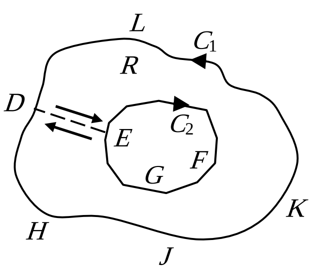
$$\lim_{\Delta z \to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z)$$

$F(z) \leq 1$ تحليلية

$$F'(z)=f(z).$$

<u>نظرية (٣):</u>

لتكن الدالة $f(z)$ تحليلية في R محدودة بمنحنيين بسيطين مقفلين C_2, C_1 (شكل ٤–١٠) وكذلك C_2, C_1 فإن



$$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz\ .$$

حيث يعبر كل من C_2, C_1 في الاتجاه الموجب بالنسبة لداخلهما.

<u>البرهان:</u>

ننشئ القاطع المستعرض DE.

بما أن $f(z)$ تحليلية في المنطقة R، فمن نظرية كوشي

$$\int_{DEFGEDHJKLD} f(z)dz$$

أو

$$\int_{DE} f(z)dz+\int_{EFGE} f(z)dz+\int_{ED} f(z)dz+\int_{DHJKLD} f(z)dz=0$$

بما أن

$$\int_{DE} f(z)dz=-\int_{ED} f(z)dz$$

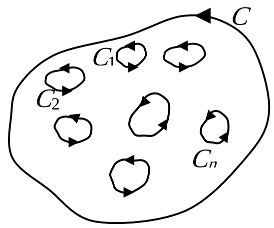
فإن

$$\int_{DHJKLD} f(z)dz=-\int_{EFGE} f(z)dz=\int_{EGFE} f(z)dz$$

أو

$$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz\ .$$

نظرية (٤):



لتكن f (z) دالة تحليلية في منطقة R محدودة بالمنحنيات البسيطة الغير متداخلة $C_1, C_2, \ldots, C_n$ حيث هذه المنحنيات تقع داخل C كما في الشكل (١١–٤) وكذلك على هذه المنحنيات فإن

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_n} f(z)\,dz \,.$$

تعتبر هذه النظرية تعميماً لنظرية (٣).