الباب الثاني

متتابعات ومتسلسلات الدوال (sequences and series of functions)

درسنا في الترم السابق بعض المتتابعات والمتسلسلات العددية مثل $\{(-1)^n\}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

وفي هذا الباب سوف ندرس المتتابعات والمتسلسلات التي تكون عناصرها وحدودها على الترتيب دوال حقيقية معرفة على فئة ما A . وسوف ندرس تقارب وتباعد هذه المتتابعات . كما سنقوم بدراسة المتسلسلات من حيث تقاربها وتباعدها وغيرها من الخصائص الخاصة بالمتسلسلات .

1 المتتابعات :

تعريف : بفرض $A \subseteq R$ ، ولكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد دالة $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ، فنقول أن (f_n) متتابعة دوال حقيقية على A إلى $\mathbb{R}$.

- المتتابعة $\{f_n(x)\}$ لكل $x \in A$ متتابعة من الأعداد الحقيقية نحصل عليها عند حساب كل الدوال عند النقطة x . وهذه المتتابعة عند $x \in A$ ممكن أن تكون تقاربية وعند نقطة أخرى $x \in A$ لا تكون تقاربية .

تعريف : التقارب النقطي .

نفرض أن (f_n) متتابعة من الدوال على $A \subseteq \mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ، $A_0 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ ، $f : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}$.

فإن المتتابعة (f_n) تقاربية على A_0 إلى الدالة f اذا كان

$$\forall\ x \in A_0 \implies (f_n(x)) \longrightarrow f(x)$$

وهذا التقارب يسمى تقارب نقطي على A_0 .

ويمكن كتابتها بشكل آخر

المتتابعة (f_n) تتقارب تقارب نقطي إلى f اذا كان

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall\ x \in A_0$$

or

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ x \in A_0\ \ \exists\ m(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$
$$\forall\ n \geq m(x,\varepsilon)$$

وتسمى f بنهاية المتابعة.

مثال ١: متابعة الدوال (f_n) حيث $f_n(x)=\frac{x}{n}$ ، $n\in\mathbb{N}$ ، $x\in\mathbb{R}$ متابعة تتقارب تقارب نقطيا إلى الدالة $f(x)=0$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=x\cdot 0=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

مثال ٢: متابعة الدوال (f_n) حيث $f_n(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ تتقارب تقارب نقطيا إلى الدالة

$$f(x)=\begin{cases}0 & \forall\ -1<x<1\\ 1 & \forall\ x=1\end{cases} \qquad x\in(-1,1]$$

عندما $x=1$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} 1^n=1=f(1)$$

عندما $x=-1$ فإن $(f_n(x))=((-1)^n)$ متابعة أعداد حقيقية تباعدية (لماذا)

عندما $0\leq x<1$ فإن $(f_n(x))=((x)^n)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=0$$

عندما $-1<x<0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} |x^n|=\lim_{n\to\infty} x^n=0$$

عندما $|x|>1$ فإن المتابعة (x^n) ليست محدودة وبالتالي ليست تقاربية على $\mathbb{R}$.

مثال ٣: متابعة الدوال (f_n) حيث

$$f_n(x)=\frac{x^2+nx}{n}, \quad x\in R, \quad n\in\mathbb{N}$$

تتقارب تقارب نقطيا إلى الدالة $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+nx}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n}+x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n}+x\lim_{n\to\infty}1=0+x=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

مثال ٤: متابعة الدوال (f_n) حيث

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx+n), \quad x\in\mathbb{R}, \ n\in\mathbb{N}$$

تتقارب تقارب نقطيا إلى الدالة $F(x)=0$ لكل $x\in\mathbb{R}$

$$\lim f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin(nx+n)$$

∵ $|\sin y|\leq 1$

$$|f_n(x) - F(x)| = \left|\frac{1}{n}\sin(nx+n)\right| \leq \frac{1}{n} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n \in \mathbb{N} \ni |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$-1 \leq \sin(nx+n) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sin(nx+n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(nx+n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin(nx+n) = 0$$

التقارب المنتظم لمتتابعات الدوال :-

تعريف :- يقال للمتتابعة (f_n) من الدوال الحقيقية المعرفة على $A \subset R$ أنها منتظمة التقارب على $A_0 \subset A$ إلى الدالة $f: A_0 \to \mathbb{R}$ اذا كان

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ m(\varepsilon)$ such that $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\ n \geq m(\varepsilon)$ and $x \in A_0$

وعادة نكتب

$$f_n \rightrightarrows f \text{ on } A_0 \quad \text{or} \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \forall\ x \in A_0$$

ملاحظة : التقارب المنتظم لمتتابعة الدوال يؤدي إلى التقارب النقطي للمتتابعة.
لكن العكس غير صحيح.

تمهيدية :- المتتابعة (f_n) لا تتقارب تقارب منتظم إلى الدالة $f: A_0 \to R$ $A_0 \subset A$ اذا وفقط اذا كان

$\exists\ \varepsilon_0 > 0,\ (f_{n_k}) \subset (f_n),\ (x_k)$ - متتابعة في A_0

بحيث أن

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

مثال ٤: المتابعة (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ، $n \in N$ ، $x \in R$ لا تتقارب

تقارب بانتظام على IR.

نأخذ المتابعة $(f_{n_k}) = (1)$ متابعة جزئية من $(f_n(x_k))$ حيث $x_k = K$

$n_k = K$

$$\therefore \left| f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \right| = \left| 1 - 0 \right| = 1 > \varepsilon$$

$\therefore$ (f_{n_k}) ليست تقاربية $\Leftarrow$ $\therefore$ (f_n) ليست منتظمة التقارب على IR إلى الدالة $f(x) = 0$ (نهاية المتابعة في التقارب النقطي)

مثال ٥: برهن أن (f_n) متابعة دوال حيث $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ ، $x \in R$ فإن (f_n) منتظمة التقارب لكل $x \in [0,a]$ ، $a > 0$ وليست منتظمة التقارب لكل $x \in [0,\infty)$.

الحل: أولاً: سوف نثبت أن (f_n) متابعة دوال تتقارب تقاربا نقطيا على الفترة $[0,\infty)$

$$\because x \in [0,\infty) \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x + n \geq n \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{x+n} \leq \frac{x}{n} \Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0 \quad \forall x \geq 0$$

الآن سوف نثبت أن (f_n) منتظمة التقارب لكل $x \in [0,a]$ ، $a > 0$

عندما $x = 0$ ، $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$

~~for~~ عندما $x > 0$ ، $f_n(x) = \frac{x}{x+n} = \frac{1}{1 + n/x}$

$$\therefore \left| f_n(x) \right| = \left| \frac{1}{1 + n/x} \right| = \frac{1}{1 + n/x} < \varepsilon \quad \forall x \geq 0 , x \leq a$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{n}{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{n}{x} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) x$$

وباختيار $m = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) a$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists m = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) a \ni \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

$\therefore$ m تعتمد فقط على ε ولا تعتمد على ε

$\therefore$ المتابعة $(f_n(x))$ منتظمة التقارب في $x \in [0,a]$

الآن سوف نثبت أن (f_n) غير منتظمة التقارب إلى $f(x)=0$ عندما $x\in[0,\infty)$

① $x=0$ فإن $f_n(x)=0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$

② $x>0$ فإن $f_n(x)=\frac{1}{1+n/x}$ فإن

$$|f_n(x)-f(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+n/x} \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n/x \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad n \geq x\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$$

وهذا يعني أن $m = x\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$ تعتمد على $\{x,\varepsilon\}$ لكل $x\in[0,\infty)$

$\therefore$ $(f_n(x))$ لا تتقارب بانتظام إلى الدالة $f(x)=0$ لكل $x\in[0,\infty)$.

نظرية ١: شرط كوشي Cauchy Condition

نفرض أن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال الحقيقية المعرفة على الفئة $A\subseteq\mathbb{R}$. فإن الشرط الضروري والكافي لتقارب المتتابعة تقارب منتظم اذا كان لكل $\varepsilon>0$ يمكن ايجاد $H(\varepsilon)\in\mathbb{N}$. حيث يكون

$$\forall\ m,n>H(\varepsilon),\quad |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad \forall\ x\in A$$

البرهان:

$\boxed{1}$ نفرض أن (f_n) متتابعة منتظمة التقارب للدالة f. و

$$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ H(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ni |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2 \quad \forall\ x\in A,\ n\geq H(\varepsilon)$$

بالمثل (f_m) متتابعة منتظمة التقارب للدالة f

$$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ H(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ni |f_m(x)-f(x)|\leq\varepsilon/2 \quad \forall\ x\in A,\ m\geq H(\varepsilon)$$

$$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ H(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ni$$

$$|f_m(x)-f_n(x)| = |f_m(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)|$$

$$\leq |f_m(x)-f(x)| + |f_n(x)-f(x)|$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\therefore$ اذا كانت (f_n) منتظمة التقارب للدالة f $\Leftarrow$

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ H(\varepsilon)\in\mathbb{N} \ni |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon \qquad \forall\ n,m\geq H(\varepsilon),\ x\in A.$$

٢ نفرض أن شرط كوشي متحقق

$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ H(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ \ni\ |f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall\ m,n\geq H(\varepsilon)\ ,\ x\in A$

∴ المتابعة $(f_m(x))$ متابعة أعداد حقيقية و تحقق متابعة كوشي ⇐ $(f_m(x))$ متابعة تقاربية (لماذا) وبالتالي تكون تقاربية تقاربًا نقطيًا

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} f_m(x)=f(x)\quad \forall\ x\in A$

$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ H(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ \ni\ |f_m(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall\ m,n\geq H(\varepsilon)\ ,\ x\in A$

$\Rightarrow\quad -\varepsilon/2<f_m(x)-f_n(x)<\varepsilon/2\quad \forall\ m,n\geq H(\varepsilon)\ ,\ x\in A$

$f_n(x)-\varepsilon/2<f_m(x)<\frac{\varepsilon}{2}+f_n(x)\quad \forall\ m,n\geq H(\varepsilon),\ x\in A$

$f_n(x)-\varepsilon/2<f(x)<\varepsilon/2+f_n(x)\quad \forall\ m,n\geq H(\varepsilon),\ x\in A$

$-\varepsilon/2<f(x)-f_n(x)<\varepsilon/2$

$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ H(\varepsilon)\in \mathbb{N}\ \ni\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2\quad \forall\ m,n\geq H(\varepsilon),\ x\in A.$

∴ اذا كان شرط كوشي متحقق ⇐ المتابعة (f_n) منتظمة التقارب.

اختبار التقارب المنتظم لمتابعات الدوال :-

النظرية الآتية هي طريقة أسهل لتحديد اذا كانت المتابعة (f_n) منتظمة التقارب.

نظرية (اختبار M_n) :-

بفرض أن (f_n) متابعة الدوال المعرفة على فترة ما I بحيث أن $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ \forall\ x\in[a,b]$

وأن $M_n=\sup\{|f_n(x)-f(x)|: x\in[a,b]\}$. فإن (f_n) منتظمة التقارب على $[a,b]$ اذا وفقط اذا كانت $M_n\to 0$ عندما $n\to\infty$.

البرهان :-

١ بفرض أن (f_n) منتظمة التقارب على $I=[a,b]$ ⇐

$\forall\ \varepsilon>0\quad \exists\ \varphi(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \ni\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad \forall\ n\geq\varphi(\varepsilon),\ \forall\ x\in I$

$\Rightarrow\quad \sup\{|f_n(x)-f(x)|: x\in[a,b]\}<\varepsilon\quad \forall\ n\geq\varphi(\varepsilon)$

$\Rightarrow\quad M_n<\varepsilon\quad \forall\ n\geq\varphi(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |M_n-0|<\varepsilon\quad \forall\ n\geq\varphi(\varepsilon)$

$\Rightarrow\quad M_n\to 0\quad \text{as}\quad n\to\infty$

∴ اذا كانت (f_n) منتظمة التقارب على $[a,b]$ ⇐ $M_n\to 0$ عندما $n\to\infty$

٢ نفرض أن $M_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ $\Leftarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ m \in \mathbb{N} \ni |M_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow M_n < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq m, \ \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow (f_n)$ متتابعة منتظمة التقارب

∴ اذا كان $M_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ $\Leftarrow$ (f_n) منتظمة التقارب على الفترة $[a,b]$.

ملاحظة :- باستخدام النظرية السابقة نستطيع أن نثبت اذا كانت المتابعة (f_n) منتظمة التقارب وذلك بعمل الآتي :-

١ نثبت أن (f_n) التقارب النقطي للمتابعة $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]\right)$

٢ نكون متابعة الأعداد الحقيقية $\{M_n\}$ وندرس تقاربها. $M_n \to 0$ as $n \to \infty$

∴ من النظرية نستطيع معرفة ما اذا كان التقارب منتظم أم لا.

مثال :- اختبر اذا كانت المتابعة (f_n) حيث $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \ x \in [0,\pi]$
منتظمة التقارب أم لا ؟

الحل :-

١ نبحث التقارب النقطي للمتابعة

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$$

∴ $f(x) = 0$

٢ نكون متابعة الأعداد الحقيقية $\{M_n\}$

$$\therefore |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - 0\right| = |y|$$

حيث $y = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

لاختبار التقارب (y) نبحث اذا كانت تزايدية أو تناقصية في الفترة $\Leftarrow$ المتابعة (y) تقاربية
(مبدأ فايرشتراس للاكمال) تراجع عليه

$$\because y = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{n}\cos nx = 0$$

$$\therefore \cos nx = 0 \Rightarrow nx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2n} \in [0,\pi]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^{3/2}\sin nx \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -n^{3/2}\sin(\pi/2) = -n^{3/2} < 0 \quad \text{at} \quad x = \frac{\pi}{2n}$$

وبالتالي فإن المتابعة تكون تناقصية أي أن أكبر قيمة لها عند $x = \frac{\pi}{2n}$ عندما

$$\therefore M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,\pi]\} = \frac{\sin \pi/2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore M_n \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

∴ (f_n) منتظمة التقارب على الفترة $[0,\pi]$

تمارين في المحاضرة ١.

١- اثبت أن (f_n) حيث

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

ليست منتظمة التقارب على $[0,1]$.

٢- اثبت ان (f_n) حيث

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \qquad x \in [a,b]\,,\ a,b \in \mathbb{Z}$$

منتظمة التقارب على $[a,b]$.

٣- اثبت أن المتابعة (f_n) حيث

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

ليست منتظمة التقارب على $[-1,1]$.