محاضرتين لطلاب

١) م س م حاسب مفاهيم أساسية

+

٢) م س م رياضيات أساسيات الرياضيات

د/ ثروت

حل المعادلات الغير خطية في مجهول واحد:

حل معادلة الدرجة الثانية: الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد هي $(I) \leftarrow ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$ حيث a, b, c ثوابت حقيقية ويحل هذه المعادلة باستخدام القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وهذان الحلان يعتمدان على القيمة $\sqrt{b^2-4ac}$ التي من الممكن أن تكون صفراً أو عدداً حقيقياً موجباً أو عدد مركب.

ملاحظة: معادلة الدرجة الثانية تحل بأكثر من طريقة إلا أن أشملها هو ما تم ذكره سابقاً وهي الطريقة التي تعرف بالقانون العام.

أنواع الجذور: المقدار $\Delta = b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة (I) وهذا المقدار يحدد نوع جذري المعادلة كما يلي:

1. إذا كان $\Delta = 0$ في هذه الحالة يوجد جذر حقيقي واحد مكرر.
2. إذا كان $\Delta > 0$ فإنه يوجد جذران حقيقيان مختلفان.
3. إذا كان $\Delta < 0$ فإن $\sqrt{\Delta}$ غير معرف في $\mathbb{R}$ ولكنه عدد مركب وعندها نقول أن للمعادلة جذرين مركبين مختلفين مترافقين.

تكوين المعادلة إذا عرف جذراها:

إذا علم جذرا المعادلة وكان المطلوب تكوين المعادلة فإنها تأخذ الشكل التالي:

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$$

مثال: كون المعادلة التي جذراها $7, -2$

الحل:

$$x^2-(7-2)x+((7)(-2))=0$$

$$x^2-5x-14=0$$

النظرية الأساسية في الجبر: أي معادلة جبرية من الدرجة n يكون لها n من الجذور.

تعريف: الجذر $x=\alpha$ يسمى جذر مكرر من الدرجة m للمعادلة $f(x)=0$ إذا كان $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-\alpha)^m$ بدون باقي.

ملاحظة: إذا كان $x=\alpha$ جذر مكرر m مرة للمعادلة $f(x)=0$ إذن:

$$f(x)=(x-\alpha)^m\,\phi(x)$$

حيث $\phi(\alpha)\neq 0$.

مثال: وضح أن $x=2$ جذر للمعادلة $x^3-19x+30=0$ ثم أوجد باقي الجذور لها.

الحل: باستخدام القسمة التركيبية على 2 نحصل على

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -19 & 30 \\ & & 2 & 4 & -30 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \end{array}$$

وحيث أن الباقي هو صفر إذن $(x-2)$ عامل من عوامل كثيرة الحدود الذي من ثم يمكن وضع المعادلة على الصورة التالية:

$$x^3-19x+30=(x-2)(x^2+2x-15)$$

$$=(x-2)(x-3)(x+5)=0$$

$\therefore$ جذور المعادلة الباقية هي $3,\ -5$

مثال: وضح أن $x=1$ جذر مكرر ثلاث مرات للمعادلة

$$x^5-3x^4-6x^3+26x^2-27x+9=0$$

ثم أوجد الجذور الأخرى للمعادلة.

الحل: باستخدام القسمة التركيبية

1	1	-3	-6	26	-27	9
		1	-2	-8	18	-9
1	1	-2	-8	18	-9	$\boxed{0}$
		1	-1	-9	9	
1	1	-1	-9	9	$\boxed{0}$	
		1	0	-9		
	1	0	-9	$\boxed{0}$		

وحيث أن الباقي في كل مرحلة يساوي صفر إذن $x=1$ جذر مكرر ثلاث مرات. ويمكن كتابة المعادلة كما يلي:

$$x^5-3x^4-6x^3+26x^2-27x+9=0$$

$$(x-1)^3(x^2-9)=0$$

$$(x-1)^3(x-3)(x+3)=0$$

وتكون جذور المعادلة هي $1, 1, 1, 3, -3$

ملاحظة: ① الفرق بين مربعين $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

② الفرق بين مكعبين $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

③ مجموع مكعبين $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$

ملاحظة: (١) إذا كان للمعادلة الجبرية ذات المعاملات الحقيقية
$f(x)=0$ جذر تخيلي $\alpha+i\beta$ فإن $\alpha-i\beta$ أيضاً
يكون جذر لهذه المعادلة.

(٢) كل معادلة جبرية ذات معاملات حقيقية من الدرجة الفردية
يجب أن تحتوي على الأقل جذر حقيقي.

<u>مثال:</u> إذا كان $x=1+i$ جذر للمعادلة
$$3x^3-10x^2+14x-8=0$$
أوجد باقي الجذور.

الحل: بما أن $x=1+i$ جذر للمعادلة السابقة إذن $x=1-i$
أيضاً جذر آخر. ولهذا لإيجاد الجذر الثالث نطبق طريقة
القسمة التركيبية كما يلي:

$1+i$	3	-10	14	-8
		$3+3i$	$-10-4i$	8
	3	$-7+3i$	$4-4i$	$\boxed{0}$
$1-i$		$3-3i$	$-4+4i$	
	3	-4	$\boxed{0}$	

$$\therefore\ 3x^3-10x^2+14x-8=(x-1-i)(x-1+i)(3x-4)=0$$

$\therefore$ جذور المعادلة هي

$$1\pm i\ ,\ \frac{4}{3}$$

نظرية: إذا كان $\alpha \in Z$ جذر للمعادلة $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداد صحيحة فإن الحد المطلق a_0 يقبل القسمة على α.

يستفاد من هذه النظرية في البحث عن الجذور الصحيحة فقط بأن نعوض بقيم قواسم الحد المطلق (الثابت) وإذا وصلنا على أحد الجذور الصحيحة α نجرى القسمة المطولة لـ $f(x)$ على $x-\alpha$ لنحصل على معادلة جديدة يكون حلها أقل من المعادلة الأصلية (أو نستخدم بدلاً من القسمة المطولة القسمة التركيبية).

مثال: حل المعادلة:
$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

الحل: بما أن درجة المعادلة هي 3 (عدد فردي) لذن عندها على الأقل جذر حقيقي. قواسم العدد 6 هي

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

باستخدام القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & \boxed{4 \neq 0} \end{array}$$

إذن $x=1$ ليست جذر للمعادلة لأن الباقي لا يساوي الصفر.

نجرب مع عامل آخر وليكن $X = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

بما أن الباقي صفر إذن $X = -1$ جذر للمعادلة .
إذن ممكن كتابة المعادلة كما يلي :

$$X^3 - 4X^2 + X + 6 = (X+1)(X^2 - 5X + 6) = 0$$

$$= (X+1)(X-2)(X-3) = 0$$

وعلى ذلك فإن جذور المعادلة هي
$-1 , 2 , 3$.

ملاحظة : إذا كانت معاملات معادلة معلومة كلها أعداد موجبة . نختبر فقط العوامل السالبة للحد المطلق .

مثال : حل المعادلة $X^3 + 9X^2 + 27X + 27 = 0$

الحل : الجذور الممكنة لهذه المعادلة هي
$\pm 1 , \pm 3 , \pm 9 , \pm 27$

وبما أن معاملات X كلها أعداد موجبة إذن نجرب فقط العوامل السالبة $-1 , -3 , -9 , -27$. إذا جربنا -1 ليس جذر تحقق بنفسك . نجرب -3

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 9 & 27 & 27 \\ & & -3 & -18 & -27 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

إذن $X = -3$ جذر للمعادلة ويمكن كتابة المعادلة كما يلي

$$x^3+9x^2+27x+27=(x+3)(x^2+6x+9)=0$$
$$=(x+3)(x+3)^2=(x+3)^3=0$$

إذاً جذور المعادلة هي -3 مكرر ثلاث مرات :

$$-3\ ,\ -3\ ,\ -3$$

مثال : حل المعادلة $x^4+6x^3+13x^2+14x+6=0$

الحل : الجذور الممكنة لهذه المعادلة هي قواسم 6 السالبة ؟

$$-1\ ,\ -2\ ,\ -3\ ,\ -6$$

باستخدام القسمة التركيبية نجد أن :

-1	1	6	13	14	6
		-1	-5	-8	-6
-3	1	5	8	6	$\boxed{0}$
		-3	-6	-6	
	1	2	2	$\boxed{0}$	

إذن $x=-1$ ، $x=-3$ جذران للمعادلة وتكتب كما يلي :

$$x^4+6x^3+13x^2+14x+6=(x+1)(x+3)(x^2+2x+2)=0$$

واضح أن المقدار $x^2+2x+2=0$ لا يحلل إذن باستخدام القانون العام .

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

إذن جذور المعادلة هي :

$$-1\ ,\ -3\ ,\ -1+i\ ,\ -1-i\ .$$

والآن نناقش كيفية إيجاد الجذور النسبية ونعطي النظرية التالية:

نظرية: ليكن $\frac{k}{l}$ عدداً نسبياً في أبسط صورة فإذا كان هذا العدد جذراً للمعادلة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

فإن a_0 يقبل القسمة على البسط k ، a_n يقبل القسمة على المقام l حيث $a_k \in \mathbb{Z} \ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

ملاحظة: إذا كانت المعادلة السابقة فيها $a_n = 1$ فإن جذورها تكون أعداداً صحيحة أو غير نسبية.

مثال: أوجد الجذور النسبية للمعادلة $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$

الحل: نجد أن $a_0 = 9$ ، $a_4 = 4$ وقواسم a_0 هي $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ كما أن قواسم a_4 هي $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ وعليه فإن إمكانية الجذر $\frac{k}{l}$ هي:

$$\left\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm \tfrac{1}{2}, \pm \tfrac{3}{2}, \pm \tfrac{9}{2}, \pm \tfrac{1}{4}, \pm \tfrac{3}{4}, \pm \tfrac{9}{4}\right\}$$

وبتجربة هذه القيم على الترتيب نجد أن الجذور النسبية هي:

$$\pm 1 , \pm 3/2$$

العلاقة بين الجذور والمعاملات:

اعتبر المعادلة من الدرجة الثالثة التالية

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0, \quad a_3\neq 0 \longrightarrow (1)$$

ولنفرض أن جذور المعادلة (1) هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

إذن يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة التالية (بالقسمة على a_3):

$$x^3+\frac{a_2}{a_3}x^2+\frac{a_1}{a_3}x+\frac{a_0}{a_3}=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \longrightarrow (2)$$

بإجراء الضرب في الطرف الأيمن ومساواة المعاملات المتناظرة في الطرفين نحصل على:

$$-\frac{a_2}{a_3}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \longrightarrow (3)$$

$$\frac{a_1}{a_3}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1 \longrightarrow (4)$$

$$-\frac{a_0}{a_3}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \longrightarrow (5)$$

والعلاقات 3، 4، 5 تعطي العلاقة بين الجذور $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ والمعاملات a_0, a_1, a_2, a_3 للمعادلة التكعيبية (1).

بنفس الطريقة لو فرضنا أن جذور $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ للمعادلة من الدرجة الرابعة

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (6)$$

نجد أن

$$-\frac{a_3}{a_4} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\frac{a_2}{a_4} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4$$

$$-\frac{a_1}{a_4} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

$$\frac{a_0}{a_4} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

ويمكن تعميم النتائج السابقة لمعادلة من الدرجة n وهذا ليس مجالنا سوف نقتصر على المعادلة التكعيبية والدرجة الرابعة فقط .

مثال : حل المعادلة

$$x^3 - 14x^2 - 84x + 216 = 0$$

علماً بأن جذور المعادلة في توالي هندسي (متوالية هندسية) .

الحل : نفرض أن الثلاث جذور هي $\frac{a}{r}, a, ar$

من العلاقات السابقة نجد أن

$$\frac{a}{r} + a + ar = 14 \rightarrow (i)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -216 \rightarrow (ii)$$

من المعادلة (ii) نجد أن

$$a^3 = -216 \Rightarrow a = -6$$

بالتعويض نتيجة $a=-6$ في (1) نحصل على

$$\frac{-6}{r} - 6 - 6r = 14 \Rightarrow 3r^2 + 10r + 3 = 0$$

$$(r+3)(3r+1) = 0$$

$$r = -3 \, , \, -\frac{1}{3}$$

If $r=-3$ the three roots are $2, -6, 18$

For $r=-\frac{1}{3}$ ---- $2, -6, 18$

∴ جذور المعادلة المعطاة هو

$\underline{\underline{2, -6, 18}}$

<u>مثال</u>: حل المعادلة $x^3 - 15x^2 + 59x - 45 = 0$

علماً بأن الجذور الثلاث في متتالية عددية .

الحل: نفرض أن الجذور هي $a-d \, , \, a \, , \, a+d$

إذن:

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow a = 5$$

$$(5-d)(5)(5+d) = 45$$

$$25 - d^2 = 9 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = 4 \, , -4$$

∴ الثلاث جذور هي

$1, 5, 9$

مثال: حل المعادلة

$$x^3-5x^2-18x+72=0$$

علماً بأن لها جذران مجموعهما 9 .

الحل: نفرض أن الجذور هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

let $\alpha_1+\alpha_2=9 \longrightarrow (i)$

إذن باستخدام العلاقة السابقة

$$\underline{\alpha_1+\alpha_2}+\alpha_3=5 \Longrightarrow \alpha_3=-4$$

كذلك نجد أن

$$\alpha_1\alpha_2\underline{\alpha_3}=-72$$ بالتعويض عن قيمة α_3 نحصل على

$$\therefore \alpha_1\alpha_2=18 \longrightarrow (ii)$$

من المعادلة (i) $\alpha_2=9-\alpha_1$ بالتعويض في (ii)

$$\alpha_1(9-\alpha_1)=18$$

$$\alpha_1^2-9\alpha_1+18=0$$

$$(\alpha_1-3)(\alpha_1-6)=0$$

$$\alpha_1=3 \text{ or } \alpha_1=6$$

∴ الجذور هي : $3, 6, -4$

تمرين: نفرض أن $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ جذور للمعادلة

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

أثبت أن:

$$\text{(i)} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \frac{a_2^2 - 2a_3 a_1}{a_3^2}$$

$$\text{(ii)} \quad \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 = \frac{a_1^2 - 2a_2 a_0}{a_3^2}$$

الحل: باستخدام العلاقة بين الجذور والمعاملات لمعادلة الدرجة الثالثة:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{-a_2}{a_3} \longrightarrow \text{(i)}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \frac{a_1}{a_3} \longrightarrow \text{(ii)}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{-a_0}{a_3} \longrightarrow \text{(iii)}$$

بتربيع طرفي المعادلة في (i) ثم التعويض من المعادلة (ii) في المعادلة الناتجة من التربيع ينتج المطلوب في (i)

لإثبات (ii) بتربيع طرفي المعادلة في (ii) مع الاختصار والتعويض بـ المتطابقة نحصل على المطلوب.

مثال: حل المعادلة

$$6x^4-3x^3+8x^2-x+2=0$$

علماً بأن لها جذرين مجموعهما صفر.

الحل: بفرض أن جذور المعادلة هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

ونفرض أن $\alpha_1+\alpha_2=0$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=-\left(\frac{-3}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\alpha_1\alpha_2+\underline{\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4}+\underline{\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4}+\alpha_3\alpha_4=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4=-\left(\frac{-1}{6}\right)=\frac{1}{6}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

بالتعويض في المعادلات السابقة عن $\alpha_1+\alpha_2=0$ نحصل على

$$\alpha_3+\alpha_4=\frac{1}{2}, \quad -\alpha_1^2+\alpha_3\alpha_4=\frac{4}{3}, \quad -\alpha_1(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{1}{6}$$

$$-\alpha_1^2\alpha_3\alpha_4=\frac{1}{3}$$

وبحل المعادلات السابقة نجد أن

$$x_1=\frac{i}{\sqrt{3}}, \quad x_3=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{15}\,i\right)$$

والجذور الأربعة هي

$$\frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{15}\,i\right), \quad \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$$

حل معادلة الدرجة الثالثة بطريقة كاردان :

تمهيد : نفترض أن لدينا المعادلة الآتية :

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \longrightarrow (1)$$

بأخذ

$$x = y - \frac{a_1}{3} \rightarrow (2)$$

نحصل على

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right) y + \left(a_3 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2 a_1^3}{27}\right) = 0 \rightarrow (3)$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (3) على الصورة

$$y^3 + a y + b = 0 \longrightarrow (4)$$

والهدف من التعويض بـ (2) هو الحصول على المعادلة (4) التي تخلو من الحد y^2 ويلاحظ أنه إذا أمكننا حل المعادلة (4) أي إيجاد قيمة y فإنه باستخدام (2) يمكن إيجاد قيم x التي هي حل للمعادلة (1) المعادلة (4) تسمى بالمعادلة المختزلة المناظرة للمعادلة (1) لأنها لا تحتوي على الحد y^2 .

طريقة كاردان لحل معادلة الدرجة الثالثة :

نفترض أن لدينا المعادلة المختزلة من الدرجة الثالثة على الصورة :

$$x^3 + ax + b = 0 \longrightarrow (1)$$

نضع

$$x = u + v \longrightarrow (2)$$

بعد التكعيب والاختصار

$$\therefore x^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uvx$$

إذن

$$x^3 - 3uvx - (u^3+v^3) = 0 \longrightarrow (3)$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة في x على الصورة المختزلة ويكون لها نفس جذور المعادلة (1) إذا كانت معاملات الحدود المتناظرة متساوية في المعادلتين (1) ، (3) أي إذا كان:

$$u^3 + v^3 = -b \longrightarrow (4)$$

$$3uv = -a \longrightarrow (5)$$

وبحل المعادلتين (4) ، (5) يمكن إيجاد u, v كما يلي:

من (5)

$$u = \frac{-a}{3v}$$

بالتعويض في (4)

$$\therefore \frac{-a^3}{27v^3} + v^3 = -b$$

بالضرب في $27v^3$ نحصل على

$$v^6 + bv^3 - \frac{a^3}{27} = 0$$

نضع $\lambda = v^3$

$$\therefore \lambda^2 + b\lambda - \frac{a^3}{27} = 0$$

$$\therefore v^3 = \lambda = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{27}\right)} \longrightarrow (6)$$

ومن (4) نحصل على

$$u^3 = \frac{-b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{27}\right)} \longrightarrow (7)$$

من المعادلات (5) ، (4) ثانية يلزم أخذ الإشارة

السالبة لـ u^3 والموجبة لـ v^3 أو العكس وعلى ذلك:

$$u^3 = \frac{-b}{2} + \sqrt{D} \longrightarrow (8)$$

$$v^3 = \frac{-b}{2} - \sqrt{D} \longrightarrow (9)$$

حيث D يسمى مميز المعادلة ويعطى بالعلاقة:

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{27}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \rightarrow (10)$$

ولما كانت المعادلة (8) معادلة من الدرجة الثالثة فلها ثلاثة قيم لـ u هي u_1, u_2, u_3 حيث

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{D}} \quad , u_2 = u_1 \omega \quad , u_3 = u_1 \omega^2$$

حيث ω^2, ω, 1 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أى أن:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \; \omega^2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \, , \; (1+\omega+\omega^2 = 0) \text{ لاحظ}$$

وعند إيجاد قيم v المناظرة لقيم u فإنه من المعادلة (9) مع الأخذ في الاعتبار للمعادلة (5) نجد أن:

$$v_1 = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{D}}$$

وعلى ذلك:

$$v_2 = v_1 \omega \quad , \quad v_3 = v_1 \omega^2$$

ومن ثم فإن جذور المعادلة المختزلة هى

$$X_1 = U_1 + V_1 \quad , \quad X_2 = U_2 + V_2 \quad , \quad X_3 = U_3 + V_3$$

والآن هناك ثلاث حالات وهى إذا كانت D سالبة أو موجبة أو صفرية.

وسوف نوضح كل حالة بمثال عليها كما يلى:

أولاً: إذا كانت $D > 0$ فإن فى هذه الحالة تكون U_1, V_1 كميات حقيقية أى أن X_1 كمية حقيقية بينما X_2, X_3 تكون كميات مركبة مترافقة.

مثال: أوجد جذور المعادلة $X^3 - 6X + 9 = 0$

الحل

المعادلة المطلوب حلها فى الصورة المختزلة حيث الصورة العامة المختزلة هى $X^3 + aX + b = 0$ أى أن

$$a = -6 \quad , \quad b = 9$$

نوجد مميز المعادلة

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3$$

$$= \frac{49}{4} > 0$$

من (9) ، (8) نحصل على

$$u^3 = \frac{-b}{2} + \sqrt{D} = \frac{-9}{2} + \frac{7}{2} = -1$$

$$v^3 = \frac{-b}{2} - \sqrt{D} = \frac{-9}{2} - \frac{7}{2} = -8$$

ومنها

$$u_1 = -1 \quad , \quad v_1 = -2$$

وعلى ذلك

$$x_1 = u_1 + v_1 = -3$$

$$\because x_2 = u_2 + v_2 =$$

حيث $u_2 = u_1 \omega \;, \; v_2 = v_1 \omega$

$$\therefore x_2 = u_2 + v_2 = u_1 \omega + v_1 \omega^2 =$$

$$x_3 = u_1 \omega^2 + v_1 \omega$$

وعلى الطالب التعويض والحصول على الجذور وهى

$$-3 \;,\; \left(\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ثانيا: إذا كانت $D=0$ فإنه من 8,9 تكون

$$u^3 = v^3 = -\frac{b}{2} \Longrightarrow u_1 = v_1 = \sqrt[3]{\frac{-b}{2}}$$

$$\therefore x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\frac{-b}{2}}$$

$$x_2 = u_1 \omega + v_1 \omega^2 = u_1 (\underbrace{\omega + \omega^2}_{=-1}) = -u_1$$

$$x_3 = u_1 \omega^2 + v_1 \omega = u_1 (\underbrace{\omega^2 + \omega}_{=-1}) = -u_1$$

حيث $1 + \omega + \omega^2 = 0$

أي أنه في هذه الحالة يكون جذران متساويان والثالث مختلف وكل الجذور الثلاث حقيقية .

مثال على الحالة السابقة :

اوجد جذور المعادلة $x^3-12x+16=0$

الحل

المعادلة في الصورة المختزلة حيث $a=-12\ ,\ b=16$

$$\therefore D=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3=64+(-4)^3=0$$

$$\therefore u_1=v_1=\sqrt[3]{\frac{-b}{2}}=\sqrt[3]{-8}=-2$$

$$\therefore x_1=u_1+v_1=-4\ ,\ x_2=x_3=-u_1=2$$

أي أن جذور المعادلة هي $2, 2, -4$

الحالة الثالثة : إذا كانت $D<0$ فإن المعادلات (8) ، (9) تأخذ الصورة التالية :

$$u^3=\frac{-b}{2}+i\sqrt{|D|}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$v^3=\frac{-b}{2}-i\sqrt{|D|}=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$

وعلى ذلك .

$$u = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$v = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)\right]$$

لذلك عند اختيار قيم u, v يجب ملاحظة أن هذه القيم يجب أن تحقق المعادلة (5) وهذه تكون فقط إذا كانت القيم مترافقة وبالتالى تصبح ثلاث جذور حقيقية على الصورة:

$$x = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

مثال: حل المعادلة $x^3-6x-4=0$

الحل

المعادلة المعطاة فى الصورة المختزلة حيث $a=-6, b=-4$

$$\therefore D=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3=4-8=-4<0$$

$u^3=-\frac{b}{2}+i\sqrt{|D|}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{2}{2}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore u^3=2+2i=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore r=\sqrt{8}, \quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

وعلى ذلك تكون الجذور هى ;

$$\therefore \quad X = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

$$\therefore \quad X = 2\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

<u>مثال</u>: حل المعادلة

$$8x^3+12x^2-18X-3=0$$

الحل

يجب وضع المعادلة في الصورة المختزلة وذلك بالقسمة على 8

أي أن:

$$X^3+\frac{3}{2}X^2-\frac{9}{4}X-\frac{3}{8}=0$$

بوضع

$$x = y-\frac{a_1}{3} = y-\frac{1}{2} \qquad \left(a_1=\frac{3}{2} \text{ حيث}\right)$$

نحصل على

$$y^3-3y+1=0 \Rightarrow a=-3,\ b=1$$

$$D=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}+(-1)^3 = \frac{-3}{4} < 0$$

∴ الجذور الثلاث <u>حقيقية</u>

$$u^3=\frac{-b}{2}+i\sqrt{|D|} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=1, \quad \theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

وعلى ذلك الجذور هي

$$y=2\sqrt[3]{r}\,\cos\left(\frac{\theta+3k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

$$y=2\sqrt{1}\,\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

$$\therefore y = 2\cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{9}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$\therefore y_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right), \quad k = 0$$

$$y_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right), \quad k = 1$$

$$y_3 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right), \quad k = 2$$

وعلى ذلك فإن جذور المعادلة المعطاة هي :

$$x = y - \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}$$

$$x_3 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}$$

تمارين عامة

① أوجد قيمة k التي تجعل $x=2$ جذر للمعادلة $kx^2-5x-2k=0$

② بين أن $x=-5$ هو جذر للمعادلة $x^3+5x^2-3x-15=0$

③ ما نوع الجذور في كل مما يأتي (حقيقية أو غير حقيقية):

(1) $8x^2+10x+3=0$ (3) $x^2-16=0$

(2) $x^2+x+3=0$ (4) $x^2-4x+4=0$

④ أوجد جذور المعادلات التالية:

(i) $2x^3-9x^2+4x=0$

(ii) $x^3-8=0$

(iii) $8x^3-9x=0$

⑤ في كل مما يلي أوجد المعادلة التي جذورها هي:

(i) $x_1=-2,\ x_2=3$ (ii) $x_1=-1,\ x_2=4$

(iii) $x_1=3,\ x_2=3$ (iv) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$

⑤ إذا علمت أن 2 أحد جذور المعادلة $x^3+5x^2-4x-20=0$
فأوجد بقية الجذور.

⑥ أوجد جذور المعادلة $x^4+2x^2-3=0$.

⑦ حل المعادلة $2x^4+3x^3+5x^2+3x+2=0$

٨) أوجد جميع الجذور النسبية للمعادلة

$$48x^3+20x^2-16x-3=0$$

٩) أوجد جميع الجذور الصحيحة للمعادلة

$$5x^3+33x^2+16x-12=0$$

١٠) باستخدام طريقة كاردان حل المعادلات التالية:

(i) $x^3-6x-9=0$ $\quad$ $3\ ,\ -\frac{3}{2}\pm i\,(0.866)$

(ii) $x^3-6x^2-12x+32=0$

(iii) $9x^3+9x-1=0$