أربع محاضرات

للطلاب

١) ٢ س ٣٠ رياضيات بحتة

+

٢) ٣ رياضيات بحتة

د/ يدن ،

الوحدة الخامسة

مشاكل النقل

Transportation Problems T.P.

تعتبر طريقة النقل من الاساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية اتخاذ قرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع (أو المواد) من مصادر متعددة إلى راكز متعددة بهدف سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة.

موذج النقل : Transportation Model

يفترض نموذج النقل وجود عدد من المصادر الانتاجية (مصانع، شركات، ...) قدارها n، وعدد من المراكز التسويقية مقدارها m . يشترط النموذج بشكله الأولي ضرورة المساواة بين حجم السلع في المصادر وحجم الطلب على السلع من قبل لمراكز. وأن هدف النموذج هو تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل.

الجدول التالي يمثل مشكلة النقل :

المراكز التسويقية.

المصادر

	D_1	D_2	D_3	....	D_m	Supply العرض
S_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	....	C_{1m}	b_1
S_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	....	C_{2m}	b_2
S_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	....	C_{3m}	b_3
	:	:	:	:	:	:
S_n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	....	C_{nm}	b_n
الطلب Demand	a_1	a_2	a_3	....	a_m	

جدول (١)

حيث C_{ij} هي تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i)الى المركز (j) ولو فرضنا ان X_{ij} عبارة عن عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر (i) الى المركز (j) فإن النموذج الرياضي لمشكلة النقل يكتب على الصورة التالية :-

$$\text{Min } Z = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + \dots + C_{ij} X_{ij} + \dots\dots + C_{nm} X_{nm}$$

Subject to,

$$\begin{array}{lcl}
C_{11} X_{11} + X_{12} C_{12} + \dots + C_{1m} X_{1m} & = & b_1 \\
C_{21} X_{21} + C_{22} X_{22} + \dots + C_{2m} X_{2m} & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots \\
C_{n1} X_{n1} + C_{n2} X_{n2} + \dots + C_{nm} X_{nm} & = & b_n \\
 & & \\
C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + \dots + C_{n1}X_{n1} & = & a_1 \\
C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + \dots + C_{n2}X_{n2} & = & a_2 \\
\vdots & & \vdots \\
C_{1m}X_{1m} + C_{2m}X_{2m} + \dots + C_{nm}X_{nm} & = & a_m \\
X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{nm} & \geq & 0
\end{array}$$

ولايجاد اقل تكلفة لمشكلة النقل سيكون من الصعوبة بمكان حل هذا النموذج الرياضي وذلك لكثرة القيود والمتغيرات ولكننا سنعرض فيما يلي طرقا أسهل لحل هذه المشكلة.

طرق حل مشاكل النقل :

يمكن حل مشاكل النقل باحدى الطرق التالية :

١- طريقة الزاوية الشمالية الغربية The North - West Cornner Method

٢- طريقة أقل التكاليف The Least Costs Method

٣- طريقة فوجل التقريبية The Vogel's Approximation Method

وفيما يلي شرح لهذه الطرق.

ـنـا ١- طريقة الزاوية الشمالية الغربية : The North-West Cornner Method

تعتبر هذه الطريقة من ابسط الاساليب الرياضية ، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الاحيان الحل الامثل لمشكلة نقل معينة. ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي :

ثال : إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاثة مراكز سويقية. أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار الأردني)، وحجم الخزين ي كل مخزن والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار اليها في الجدول أدناه :

المراكز

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30 / 30

جدول (٢)

مطلوب : ما مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر الى المراكز باستخدام لريقة الزاوية الشمالية الغربية.

لاحظة : ان الارقام الموجودة داخل المربعات الصغيرة في جدول (٢) تمثل كلفة لنقل بالدينار الأردني، فمثلا كلفة نقل وحدة واحدة من المصدر (S_1) الى مركز لطلب D_3 هي 8 دنانير.

خطوات الحل :

بداية يجب التأكد من توفر شرط التوازن أي ان مجموع العرض المتوفر في المصادر يساوي مجموع ما تطلبه المراكز التسويقية، من الجدول نلاحظ أنها متساوية حيث أن : $12 + 14 + 4 = 9 + 10 + 11$

١- نأخذ الخلية الاولى والتي تقع في الصف الاول (الشمالي) والعمود الاول (الغربي) وهي الخلية (S_1, D_1) ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_1 بالكمية المتوفرى لدى المصدر S_1 ونخصص اقل الكميتين للخلية (S_1, D_1).

$$\text{Min}\,(9, 12) = 9$$

أي يتم تخصيص 9 وحدات للخلية (S_1, D_1) وهذا يؤدي الى سد احتياجات المركز D_1 بالكامل، حيث يتم شطب العمود الاول وذلك يشير الى ان التخصيصات للخلايا الاخرى في العمود ذاته تساوي صفر.

ملاحظة :أ - يتم تعديل العرض والطلب للجدول بعد كل عملية تلبية طلب ما.

ب- ان عملية النقل بموجب هذه الطريقة تستمر بنفس الصف حتى يتم اغلاقه ونفاذ جميع الكمية المتاحة في المصدر المقابل للصف المعنى

٢- نأخذ الخلية الثانية (S_1, D_2)، ونقارن الكمية المتاحة لدى المصدر S_1 بالكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_2 ونختار الاقل ونخصصها للخلية (S_1, D_2).

$$\text{Min}\,(3, 10) = 3$$

لذا نخصص 3 وحدات للخلية (S_1, D_2).

٣- نلاحظ هنا أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفدت بالكامل، لذا نأخذ الخلية (S_2, D_2) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_2 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, D_2)

$$\text{Min}\,(7, 14) = 7$$

٤- نأخذ الخلية (S_2, D_3) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ، ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2, D_3)

$$\text{Min}\,(7, 11) = 7$$

- نأخذ الخليـة (S_3, D_3) ، ونخصـص لهـا 4 وحـدات وهـي الكميـة المتبقيـة لـدى مركز S_3 والمطلوبة من قبل مركز الطلب D_3 .

عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت، بالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول النقل بصيغته النهائية كالآتي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5 ‎ 9	1 ‎ 3	8	~~12~~ ~~3~~ 0
S2	2	4 ‎ 7	0 ‎ 7	~~14~~ ~~7~~ 0
S3	3	6	7 ‎ 4	~~4~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ ~~4~~ 0	

جدول (٣)

يكون اجمالي تكاليف النقل طبقا للجدول السابق :

$$\text{Total Cost} = 5 \times 9 + 1\times3 + 4\times7 + 0\times7 + 7\times4 = 104 \text{ J.D}$$

١- طريقة اقل التكاليف The Least Costs Method

إن إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مشكلة نقل معينة عند تلبية احتياجات مراكز الطلب. وضعت طريقة اقل التكاليف لمعالجة مثل هذا النوع من العيوب في نماذج النقل حيث يتم البحث والتركيز بموجب هذه الطريقة على اقل تكلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض.

سنعتمد على مثالنا السابق في توضيح الخطوات الرئيسية لطريقة أقل التكاليف.

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30

جدول (٤)

- نلاحظ أن اقل تكلفة في جدول النقل أعلاه هي الصفر، وهي تقابل المصدر S_2 والمركز D_3، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع ما يحتاجه مركز الطلب D_3، ثم نختار أقل الكميتين، ونخصصها للخلية (S_2, D_3).

$$\text{Min}\ (11,14) = 11$$

ملاحظة : نعدل العرض والطلب للجدول بعد كل عملية تخصيص معينة، كما هو الحال في طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

- نبحث عن تكلفة قليلة اخرى ضمن القيم المتبقية في الجدول، فنجد أنها تساوي (1)، وهي تقع في الخلية (S_1, D_2) لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع ما يحتاجه المركز D_2، ثم نختار أقل الكميتين $\text{Min}\ (10,\ 12) = 10$، ونخصصه للخلية (S_1, D_2).

- التكلفة الاقل الاخرى ضمن الجدول تساوي 2 وتقع في الخلية $(S_2\ , D_1)$ لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع احتياجات المركز D_1 ونختار أقل الكميتين $\text{Min}\ (9,3) = 3$ ، ونخصصها للخلية $(S_2\ , D_1)$.

- التكلفة الاقل التالية تساوي 3 وتقع ضمن الخلية $(S_3\ , D_1)$، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_3 مع احتياجات المركز D_1 ونختار أقل الكميتين $\text{Min}\ (4, 9) = 4$ ، ونخصصها للخلية $(S_3\ , D_1)$.

– التكلفة الاقل الاخيرة ضمن الجدول تساوي 5 وتقع في الخلية (S_2 , D_1) ، لـذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع احتياجات مركـز الطلـب D_1 ونـختـار اقـل الكميتين $Min(2,2) = 2$، ونخصصها للخلية (S_2 , D_1)

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5 / 2	1 / 10	8	~~12~~ ~~2~~ 0
S2	2 / 3	4	0 / 11	~~14~~ ~~3~~ 0
S3	3 / 4	6	7 / 0	~~4~~ 0
الطلب	~~9~~ ~~6~~ ~~2~~ 0	~~10~~ 0	~~11~~ 0	

جدول (٥)

ان الجدول أعلاه يمثل جدول النقل بصيغته النهائية وبكلفة اجمالية تساوي 38 دينـار حيث تم حسابها كالآتي :

E.P.

$$\text{Total Cost} = 5x2 + 1x10 + 2x3 + 0x11 + 3x4 = 38 \text{ J.D}$$

ملاحظة : اذا كانت هناك في إحدى مراحل عملية المقارنة بيـن كلـف النقـل، كلفتيـن متساويتين فبالامكان اختيار احداهما عشوائيا.

٣– طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximations Method (VAM)

تعتبر طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث على الاطلاق لمـا تتميز بـه هـذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الامثل او الحل القريب من الحل الامثل ونادرا ما تكون طريقتي أقل التكاليف والطريقة الشمالية الغربية افضل من طريقـة فوجـل. لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية اطول مما تحتاجه طريقتا اقل التكـاليف والزاوية الشمالية الغربية.

وتتلخص خطوات ايجاد الحل الاساسي الأولي بهذه الطريقة كما يلي :

١- حساب الفرق بين اقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل.

٢- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك اكبر فرق في الكلفة (أعلى جزاء).

٣- اختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.

٤- في الخلية التي اختيرت في الخطوة (٣) نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الاقل.

٥- نعيد حساب الفرق مرة اخرى لكل من الاعمدة والصفوف ونكرر العملية السابقة الى ان نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

سيتم توضيح طريقة فوجل بالاستعانة بمثالنا السابق، ثم بعد ذلك تتم المقارنة بين اجمالي التكاليف لهذه الطريقة باجمالي التكاليف الذي تم الحصول عليها بموجب الطرق السابقة.

مركز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض	فرق الصفوف
S1	5	1	8	12	4
S2	2	4	0	14	2
S3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	11		
فرق الأعمدة	1	3	7		

جدول (٦)

– نجد الفرق في التكلفة للصفوف وللأعمدة كما هو مبين في الجدول (٦).

- نجد الفرق في التكلفة للصفوف وللأعمدة كما هو مبين في الجدول (٦).
- نلاحظ أن للعمود الثالث اكبر فرق والذي يساوي 7.
- نبحث عن اقل كلفة في العمود الثالث، فنجد أن للخلية (S_2, D_3) اقل كلفة والبالغة صفر.
- نقارن احتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة في المصدر S_2 ثم نختار ما هو أقل الكميتين. $\text{Min}(11, 14) = 11$

مركز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض	
S1	5	1	8	12	4
S2	2	4	0 11	~~14~~ 3	2
S3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	~~11~~ 0		
	1	3			

جدول (٧)

- ويتم تعديل العرض والطلب في الجدول أعلاه، وهذه العملية تؤدي الى تلبية كامل احتياجات المركز D_3، لذا يشطب المركز D_3 من الجدول لغرض اعادة حساب الفروق بين التكاليف مرة أخرى.
- يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود في الجدول (٧).
- نلاحظ أن للصف الأول اعلى فرق في الكلفة. (S_1, D_2)
- نبحث عن اقل كلفة في الصف الاول، فنجد أن للخلية (D_2, S_1) اقل كلفة والبالغة 1.
- نقارن احتياجات مركز الطلب D_2 مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر S_1، ثم نختار اقل الكميتين . $\text{Min}(10,12) = 10$

- يتم شطب مركز الطلب D_2، ولهذا السبب سوف لا يؤخذ بعين الاعتبار عند حساب الفرق في الكلفة في المراحل اللاحقة.

مركز الطلب

المصادر		D1	D2	D3	العرض	فرق الصفوف
	S1	5	1 / 10	8	~~12~~ 2	4
	S2	2	4	0 / 11	~~14~~ 3	2
	S3	3	6	7	4	3
	الطلب	9	~~10~~ 0	~~11~~ 0		
	فرق الاعمدة	1				

جدول (٨)

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف والاعمدة بسبب وجود مركز طلب واحد وهو (D_1) والذي لم يحصل على احتياجاته حتى الآن.

ان ما نحتاجه هنا هو البحث عن اقل كلفة في العمود الأول، والذي نلاحظ فيه ان المصدر S_2 يقابل اقل كلفة والتي تساوي 2 لذا سيتم تخصيص كامل محتويات المصدر S_2 لتلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1، ويتم الغ... المركز S_2.

من جهة أخرى بامكان المصدر S_3 تلبية جزء من احتياجات مركز الطلب D_1 وذلك بتوفير 4 وحدات فقط من احتياجات D_1 البالغة 6 وحدات. وأخيرا يتم تخصيص آخر احتياجات المركز D_1 والبالغة 2 وحدة من المصدر S_1. وبهذا يصبح نموذج النقل بصيغته النهائية بموجب طريقة فوجل كالآتي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5 / 2	1 / 10	8	---
S2	2 / 3	4	0 / 11	---
S3	3 / 4	6	7	---
الطلب	---	---	---	

جدول (٩)

وجب نموذج النقل أعلاه ستكون الكلفة الأجمالية كما يلي :

$$(\text{Total Cost}) = 5x2 + 1x10 + 2x3 + 0x11 + 3x4 = 38 \quad \text{J.D}$$

لاحظة : في أغلب الاحيان تكون نتائج طريقتي فوجل، والتكلفة الاقل متقاربة أو متطابقة.

الكلفة الاجمالية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية = 104 دينار.
الكلفة الاجمالية بموجب طريقة اقل التكاليف = 38 دينار
الكلفة الاجمالية بموجب طريقة فوجل = 38 دينار

نلاحظ أن الطريقتين الاخيرتين قد حققتا اقتصادا في مجموع التكاليف قدره 6 دينار مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

مثال :-

الجدول التالي يبين تكلفة نقل الوحدة الواحد من سلعة معينة من ثلاثة مصادر الى ثلاثة مراكز طلب، ويبين الجدول كذلك امكانات المصادر واحتياجات مراكز الطلب. بالاعتماد على هذا الجدول، اوجد الحل الاولي باستخدام :

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
- طريقة اقل التكاليف.
- طريقة فوجل التقريبية.

مراكز الطلب

	D1	D2	D3	العرض
S1	2	1	5	10
S2	7	4	3	25
S3	6	2	4	20
الطلب	15	18	22	

المصادر

الحل :-

أ - طريقة الزاوية الشمالية الغربية :

الحل الاولي باستخدام هذه الطريقة سيكون كما في الجدول التالي :

مراكز الطلب

	D1	D2	D3	العرض
S1	2 / 10	1	5	~~10~~ 0
S2	7 / 5	4 / 18	3 / 2	~~25~~ ~~20~~ 2
S3	6	2	4 / 20	~~20~~ 0
الطلب	~~15~~ ~~5~~ 0	~~18~~ 0	~~22~~ ~~20~~ 0	

المصادر

اجمالي التكاليف للتوزيع اعلاه :

$$2 \times 10 + 7 \times 5 + 4 \times 18 + 3 \times 2 + 4 \times 20 = 213 \text{ J.D.}$$

ب – طريقة اقل التكاليف :

الحل الاولي باستخدام هذه الطريقة هو :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	2	1 10	5	~~10~~ 0
S2	7 3	4	3 22	~~25~~ ~~3~~ 0
S3	6 12	2 8	4	~~20~~ ~~12~~ 0
الطلب	~~15~~ ~~3~~ 0	~~18~~ ~~8~~ 0	~~22~~ 0	

اجمالي التكاليف للتوزيع اعلاه :

$$1 \times 10 + 7 \times 3 + 3 \times 22 + 6 \times 12 + 2 \times 8 = 185 \text{ J.D}$$

جـ – طريقة فوجل التقريبية :

– نجد فرق الصفوف والاعمدة ونؤشرها على جانبي الجدول، ونختار اكبر فرق منها.

أ– اكبر فرق هو للعمود الاول، لذا نأخذ الخلية صاحبة اقل تكلفة في هذا العمود وهي (S1, D1) و نخصص لها 10 وحدات من الكمية المتاحة لدى المصدر S1 ونلغي الصف الاول لنفاذ الكمية المتاحة لدى المصدر S1 .

مراكز الطلب

		D1	D2	D3	العرض	فرق الاعمدة
	S1	[2] 10	[1]	[5]	~~10~~ 0	1
المصادر	S2	[7]	[4]	[3]	25	1
	S3	[6]	[2]	[4]	20	2
	الطلب	~~15~~ 5	18	22		
	فرق الصفوف	4	1	1		

* نظرا لالغاء الصف الاول نعيد حساب فرق الصفوف لينتج لدينا الجدول التالي:

مراكز الطلب

		D1	D2	D3	العرض	فرق الاعمدة
	S1	[2] 10	[1]	[5]	~~10~~ 0	
المصادر	S2	[7]	[4]	[3]	25	1
	S3	[6]	[2] 18	[4]	~~20~~ 2	2
	الطلب	~~15~~ 5	~~18~~ 0	22		
	فرق الصفوف	~~4~~ 1	~~1~~ 2	1		

– اكبر فرق هو للصف الثالث، لذا نأخذ الخلية صاحبة اقل تكلفة في هذا الصف وهي (S3,D2) ونخصص لها 18 وحدة من الكمية المتاحة في المصدر S3، ونلغي العمود الثاني لأنه تمت تلبية كامل احتياجات المركز D2.

* نظرا لالغاء العمود الثاني نعيد حساب فرق الاعمدة لنحصل على الجدول التالي:

مراكز الطلب

المصادر		D1	D2	D3	العرض	فرق الأعمدة
	S1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	~~10~~ 0	
	S2	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 22	~~25~~ 3	~~1~~ 4
	S3	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 18	$\boxed{4}$	~~20~~ 2	2
	الطلب	~~15~~ 5	~~18~~ 0	~~22~~ 0		
	فرق الصفوف	~~4~~ 1		1		

اكبر فرق هو للصف الثاني، لذا نأخذ الخلية (S2,D3) وهي صاحبة اقل تكلفة ونخصص لها 22 وحدة من الكمية المتاحة في المصدر S2 ونلغي العمود الثالث لأنه تمت تلبية كامل احتياجات مركز الطلب D3.

بقي لدينا مركز طلب واحد احتياجاته 5 وحدات، ومصدرين هما S3, S2 امكانياتهم على التوالي 2,3 ولأن الخلية (S3, D1) هي صاحبة اقل تكلفة في العمود الاول لذا نخصص لها 2 وحدة هي كل الامكانيات المتاحة في المصدر S3.

وأخيرا نخصص 3 وحدات للخلية (S2, D1) وهي آخر كمية متوفرة في المصدر S2 ومطلوبة من قبل المصدر D1.

مما سبق نجد أن الحل الاولي لمسألة النقل هذه سيظهر بالشكل التالي:

مراكز الطّلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	2 / 10	1	5	~~10~~ 0
S2	7 / 3	4	3 / 22	~~25~~ ~~3~~ 0
S3	6 / 2	2 / 18	4	~~20~~ ~~2~~ 0
الطلب	~~15~~ ~~5~~ ~~2~~ 0	~~18~~ 0	~~22~~ 0	

اجمالي التكاليف :

$$10 \times 2 + 3 \times 7 + 22 \times 3 + 2 \times 6 + 18 \times 2 = 155 \text{ J.D}$$

نلاحظ من هذا المثال ان طريقة فوجل اعطت اقل اجمالي تكاليف والذي يعني ان هذه الطريقة أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية و طريقة أقل التكاليف.

نموذج النقل غير المتوازن :

لقد ذكرنا سابقا أن مجموع قيم العرض يجب أن تكون مساوية لمجموع قيم الطلب ولكن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية وبالتالي يكون النموذج غير متوازن ولكي نوازن النموذج نضيف الى الإقل، قيمة الفرق وتكون التكلفة الموازية لها اصفار فإذا :

١- كان العرض اكثر من الطلب فإننا نضيف الى الجدول عمود آخر تكون فيا التكاليف = صفر ونحل النموذج بأي طريقة من الطرق الثلاث السابقة.

٢- كان العرض أقل من الطلب نضيف صف آخر بنفس الطريقة تكون التكاليف فيه اصفار ونوازن النموذج.

مثال : وازن نموذج النقل التالي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	2	1	3	100
S2	5	4	0	150
S3	2	3	6	50
الطلب	100	120	60	300 / 280

جدول (١٠)

نلاحظ هنا أن مجموع قيم العرض = 300، ومجموع قيم الطلب = 280 ، وبالتالي نضيف عمود آخر قيمة الطلب فيه = 20 ، والتكاليف = صفر ، كالآتي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2	1	3	0	100
S2	5	4	0	0	150
S3	2	3	6	0	50
الطلب	100	120	60	20	300 / 300

جدول (١١)

مثال٢ :- وازن نموذج النقل التالي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	0	1	2	120
S2	2	3	5	100
الطلب	100	100	50	

جدول (١٢)

نلاحظ أن الطلب أكثر وبالتالي نضيف صف قيمته 30 وتكاليفه = صفر كالآتي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	0	1	2	120
S2	2	3	5	100
S3	0	0	0	30
الطلب	100	100	50	

جدول (١٣)

Determine
obtain an initial feasible solution to the following TP using ---
VAM

Solve the following transportation problem

اختبار مثالية الحل الأولي :

ان الحصول على الحل الاساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وانما يجب ان تستخدم اساليب اخرى لاختبار هل ان الحل الاساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق احدى الطرق السابقة هو الحل الامثل، اي الحل الوحيد الذي لا يمكن ايجاد حل افضل منه ام ان هناك حلولا أمثل منه.؟ هنا طريقتان لاختبار امثلية الحل هما :

١- طريقة المسار المتعرج The Stepping Stone Method

٢- طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method

١- طريقة المسار المتعرج :

تقضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول (الحل الأولي) لمعرفة اثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة.

وإذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للاستفادة من ذلك.

وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل الى ان يتضح ان شغل اي خلية فارغة لن يؤدي الى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق :

- يجب أن يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.
- يجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الافقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.
- وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة.
- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة.
- حتى يكون الحل امثلا يجب ان تكون التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر.

مثال : فيما يلي جدول الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{8}$	12
S2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{0}$ 7	14
S3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 4	4
الطلب	9	10	11	

جدول (١٤)

المطلوب : ايجاد الحل الأمثل مستخدما طريقة المسار المتعرج.

من الجدول (١٤) يتضح وجود اربعة خلايا فارغة هي الخلايا :

(S1 , D3) , (S2 , D1) , (S3 , D1) , (S3 , D2)

ويتم تقييم اثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية كالآتي :

١- تكوين مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة.

٢- يتم وضع اشارة زائد (+) للخلية المراد تقيمها ثم اشارة ناقص (-) للخلية التي تليها في المسار، ثم اشارة زائد للخلية التالية في المسار، وهكذا تتالى الاشارة الموجبة والسالبة حتى نصل إلى الخلية التي بدأناها.

٣- نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية)، وذلك بجمع كلف جميع الخلايا الواقعة على المسار بعد وضع الاشارات عليها.

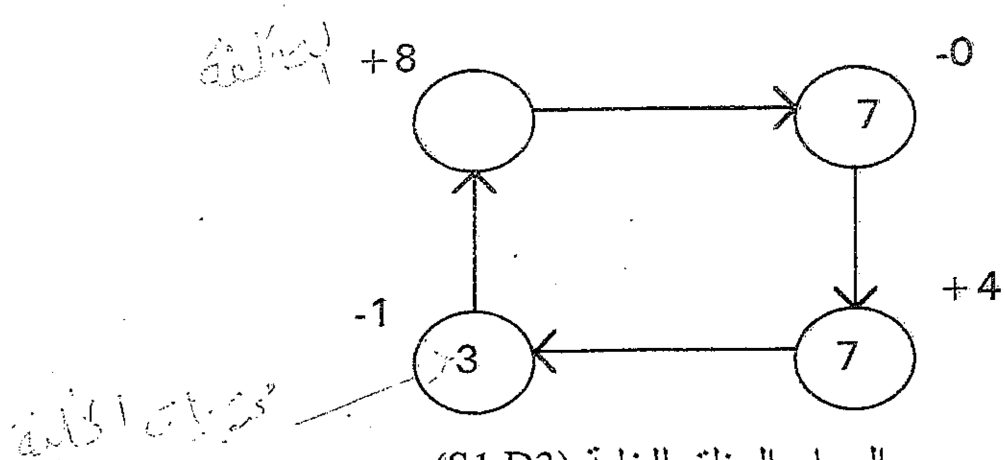
٤- اذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما بالسالب فان ذلك يعني ان شغل تلك الخلية سيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.

٥- في حالة وجود اكثر من خلية فارغة لها تكلفة غير مباشرة بالسالب فإنه تعطي الاولوية للخلية صاحبة اكبر رقم سالب، حيث أن شغل تلك الخلية يكون اكثر فاعلية في خفض التكاليف.

الخلية (S1, D3) :

المسار المغلق:(S1,D3) → (S1, D2) → (S2, D2) → (S2, D3) → (S1, D3)

التكلفة غير المباشرة : $+8 - 0 + 4 - 1 = 11$



المسار المغلق للخلية (S1,D3)

ملاحظة : ١- الارقام داخل الدوائر (في الشكل أعلاه) تمثل محتويات كل خلية مشغولة.

٢- الارقام التي خارج الدوائر تمثل تكلفة كل خلية من الجدول (١٤).

الخلية (S2 , D1) :

المسار المغلق: (S2 , D1)→(S1 , D1)→(S1 , D2)→(S2 , D2)→(S2 , D1)

التكلفة غير المباشرة : $+2 - 4 + 1 - 5 = -6$

الخلية (S3 , D2) :

المسار المغلق:(S3 , D2) → (S2, D2) → (S2 ,D3) → (S3,D3) → (S3,D2)

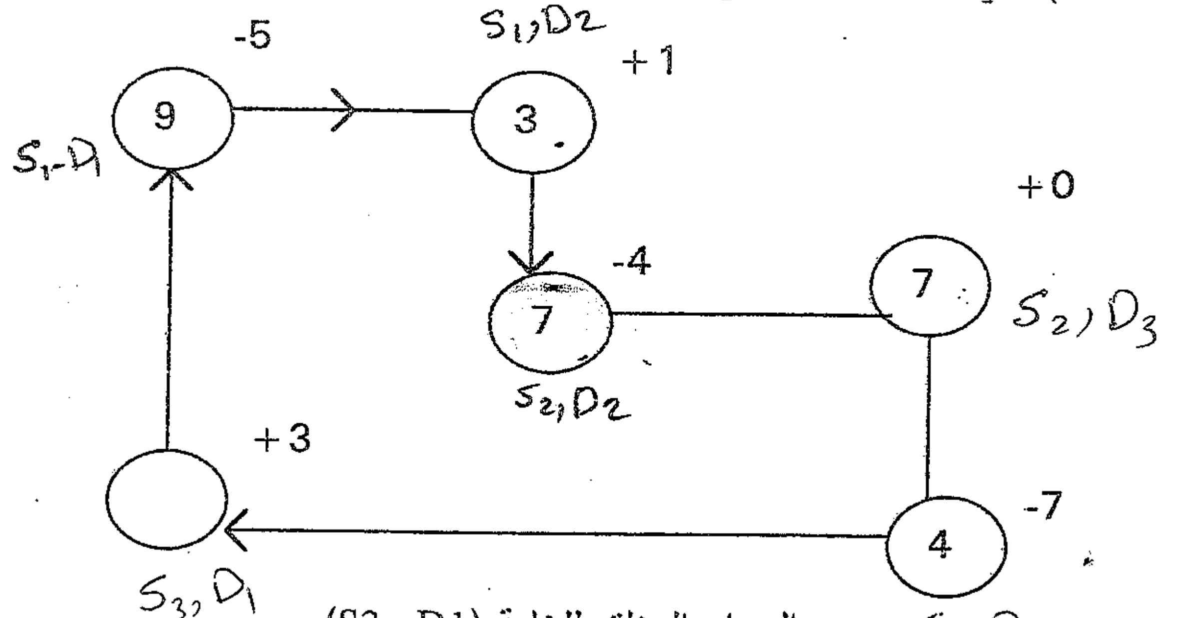
التكلفة غير المباشرة : $+6 - 7 + 0 - 4 = -5$

الخلية (S3 , D1) :

المسار المغلق : (S3,D1)→(S1,D1)→ (S1, D2) → (S2, D2)→ (S2, D3) → (S3, D3) → (S3 , D1)

التكلفة غير المباشرة : $+3 - 5 + 1 - 4 + 0 - 7 = -12$

وباستعراض قيم التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة نجد أن تكاليف النقل الكلية يمكن تخفيضها في حالة شغل الخلية (S3 , D1) حيث أن لها اقل تكلفة غير مباشرة بالسالب وتتحدد الكمية التي ستنقل الى الخلية (S3, D1) من الخلايا المشغولة على أساس اقل مقدار في الخلايا المشغولة (الارقام داخل الدوائر في الشكل أدناه) التي اشارتها سالبة في المسار المغلق للخلية (S3 , D1).



المسار المغلق للخلية (S3 , D1)

وبدراسة الخلايا التي يمكن النقل منها إلى الخلية (S3 , D1) نجد أنه يمكن النقل من الخلية (S1 , D1) أو (S2 , D2) أو (S3 , D3) (حيث أن قيم التكلفة لها في المسار سالبة، لاحظ الارقام الموجودة فوق الدوائر في الشكل أعلاه) وحفاظ على عدم السالبية الخلايا نأخذ اقل القيم في الخلايا السالبة وهي 4. ونجمعها إلى القيم في الخلايا الموجبة، ونطرحها من القيم التي في الخلايا السالبة. ويترتب على ذلك تغير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق (S3, D1) حيث تصبح كالآتي:

من (S1, D1) : $9 - 4 = 5$

إلى (S1, D2) : $3 + 4 = 7$

من (S2, D2) : $7 - 4 = 3$

إلى (S2, D3) : $7 + 4 = 11$

من (S3, D3) : $4 - 4 = 0$

إلى (S3, D1) : $0 + 4 = 4$

ويمكن تصور جدول النقل الثاني بعد اجراء التعديل السابق الذكر كالآتي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5 (5)	1 (7)	8	12
S2	2	4 (3)	0 (11)	14
S3	3 (4)	6	7 (0)	4
الطلب	9	10	11	

جدول (١٥)

وعليه فان تكاليف النقل الكلية طبقا لجدول النقل الثاني هي :

$$5\times5 + 1\times7 + 4\times3 + 0\times11 + 3\times4 + 7\times0 = 25 + 7 + 12 + 12 = 56 \ \text{J.D}$$

كانت الكلفة الكلية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية J . D (104) في حين بلغت الكلفة الاجمالية بعد التعديل بموجب طريقة المسار المتعرج (56 J.D) اي هناك اقتصاد في الكلفة ما قيمته (48 J.D) نتيجة شغل الخلية (S3 , D1) وهذا الحل (جدول ١٥) كسابقه، يتطلب التأكد من كونه يمثل الحل الامثل المنشود ام لا.

بمعنى آخر هل هناك امكانية للحصول على نتائج افضل من النتيجة السابقة والبالغة (56 J.D).

اختبار مثالية جدول النقل الثاني :

يتم اختبار مثالية جدول النقل الثاني (جدول ١٥) السابق ذكره طبقا لنفس القواعد السابقة والتي تتمثل في دراسه أثار شغل الخلايا الفارغة على التكلفة الكلية وذلك على النحو التالي :

الخلية (S1 , D3) :

المسار المغلق : (S1 , D3) →(S2 , D3)→(S2 , D2)→(S1 , D2)→ (S1, D3)

التكلفة غير المباشرة : +8 - 0 + 4 - 1 = +11

الخلية (S2 , D1) :

المسار المغلق: (S2,D1) → (S1, D1) → (S1, D2)→ (S2, D2) → (S2, D1)

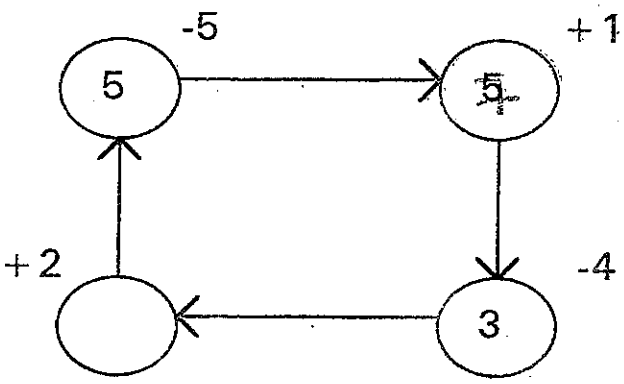
التكلفة غير المباشرة : 2 - 5 + 1 - 4 = -6

الخلية (S3 , D2) :

المسار المغلق : (S3 , D2) →(S3 , D3)→(S2 , D3)→(S2 , D2)→ (S3, D2)

التكلفة غير المباشرة : +6 - 7 + 0 - 4 = -5

وبدراسة آثار شغل الخلايا الفارغة السابقة يتضح لنا انه يمكن تخفيض تكاليف النقل في حالة ملء الخلية (S2, D1)



المسار المغلق للخلية (S2, D1)

وبالنظر الى المسار المغلق للخلية (S2, D1) نجد أنه يمكن النقل اليها من الخلية (S2, D2) بمقدار 3 وحدات او من الخلية (S1, D1) بمقدار 5 وحدات

وهي الخلايا ذات الاشارات السالبة في المسار المغلق للخلية (S2, D1) وطبقا لما سبق ذكره نأخذ اقل القيمتين في هاتين الخليتين وهي 3 وحدات ويترتب على ذلك تغير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق لخلية (S2, D1) حيث تصبح كالاتي :-

من (S1, D1) : $5 - 3 = 2$

من (S2, D2) : $3 - 3 = 0$

الى (S1, D2) : $7 + 3 = 10$

الى (S2, D1) : $0 + 3 = 3$

ويمكن تصور جدول النقل الثالث بعد اجراء التعديل السابق الذكر كالاتي :-

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{1}$ 10	$\boxed{8}$	12
S2	$\boxed{2}$ 3	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{0}$ 11	14
S3	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 0	4
الطلب	9	10	11	

جدول (١٦)

وتكون تكاليف النقل طبقا للجدول الثالث السابق عرضه كالاتي :-

$$\text{Total Cost} = 5\times2 + 1\times10 + 2\times3 + 4\times0 + 0\times11 + 3\times4 + 7\times0$$
$$= 10 + 10 + 6 + 0 + 0 + 12 + 0 = 38 \text{ J.D}$$

نلاحظ هنا أن شغل الخلية (S2, D1)، أدى الى الاقتصاد في اجمالي التكاليف بمقدار 18 دنانير.

اختبار مثالية جدول النقل الثالث :

يتم اختبار مثالية جدول النقل الثالث رقم (١٦) بنفس الطريقة السابقة كالاتي:-

الخلية (S1, D3) :

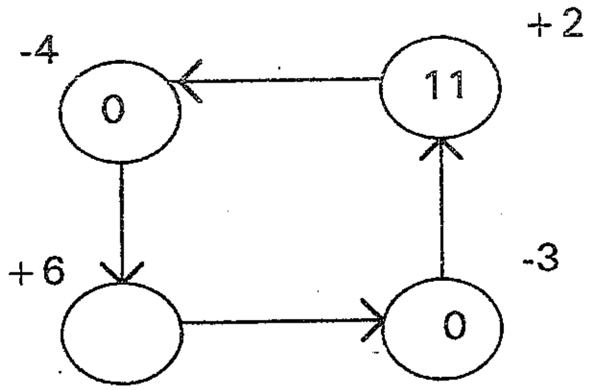
المسار المغلق $(S1, D3) \rightarrow (S2, D3) \rightarrow (S2, D2) \rightarrow (S1, D2) \rightarrow (S1, D3)$

التكلفة غير المباشرة : $+8 - 0 + 4 - 1 = 11$

الخلية (S3, D2) :

المسار المغلق $(S3,D2) \rightarrow (S3,D1) \rightarrow (S2,D1) \rightarrow (S2,D2) \rightarrow (S3,D2)$

التكلفة غير المباشرة : $+6 - 3 + 2 - 4 = 1$



المسار المغلق للخلية (S3, D2)

من العرض السابق يتضح لنا أن شغل اي مـن الخلايـا الفارغـة لـن يخفـض التكاليف، حيث ان التكلفة غير المباشرة لكل منها هي ارقام موجبة ولذلك فإن جدول النقل (رقم ١٦) يمثل الحل الامثل ويعطينا الخطة المثلى لتوزيع وحدات السـلعة من المصادر الثلاثة الى مراكز التوزيع الثلاثة.

لاحظ أن جدول النقـل (١٦) والـذي حصلنـا عليـه باستخدام طريقـة المسـار المتعرج هو نفس جدول الحل الذي حصلنا عليه سابقا عنـد استخدامنا لطريقـة اقـل التكاليف وهذا يدل علـى ان طريقـة اقـل التكـاليف تعطـي فـي اغلـب الاحيـان الحـل الامثل لمشكلة النقل.

ملاحظة : اذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما صفرا فإن هذا يعني ان شغل هـذه الخلية لن يؤثر على اجمالي التكاليف زيادة او نقصان.

طريقة التوزيع المعدلة : The Modifieded Distributed

ناقشنا فيما سبق كيفية استخدام طريقة المسار المتعرج في اختبار مثالية جدول الحل الاولي. وندرس هنا طريقة اخرى بديلة لاختبار المثالية وهي طريقة التوزيع المعدلة.

وتتلخص خطوات هذه الطريقة لاختبار مثالية الحل كالاتي :

١- يتم تكوين عدة معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جدول الحل الأولي وتعد كل معادلة على اساس العلاقة التالية :

$$Ui + Vj = Cij$$

Ui = المتغير الخاص بالصف i والذي تقع فيه الخلية المعنية.

Vj = المتغير الخاص بالعمود j والذي تقع فيه الخلية المعنية.

Cij = تكلفة الخلية التي تقع في الصف i والعمود j.

٢- ايجاد حل المعادلات الخاصة بالخلايا المشغولة والسابق ذكرها في خطوة (١).

٣- يتم تقييم كل خلية غير مشغولة (حساب التكلفة غير المباشرة لها) وفقا للمعادلة التالية:

$$Cij - Ui - Vj \;=\; \text{التكلفة غير المباشرة للخلية } (i, j)$$

٤- بعد التعرف على آثار شغل الخلايا الفارغة على اجمالي التكاليف يستكمل الحل طبقا لما هو متبع في طريقة المسار المتعرج.

ولايضاح ما تقدم سنقوم بعمل اختبار المثالية لجدول النقل الاولي في طريقة الزاوية الشمالية والغربية، والذي سبق التعامل معه في طريقة المسار المتعرج.

مراكز الطلب

العرض

	D1	D2	D3	العرض
S1	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{8}$	12
S2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{0}$ 7	14
S3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 4	4
الطلب	9	10	11	

جدول (١٧)

يلاحظ من الجدول اعلاه ان هناك خمسة خلايا مشغولة هي :

(S1,D1),(S1,D2), (S2,D2),(S2,D3),(S3,D3)

لذلك يتم تكوين المعادلات التالية لتلك الخلايا على التوالي :

$U1 + V1 = 5$ .... (1)

$U1 + V2 = 1$ .... (2)

$U2 + V2 = 4$ .... (3)

$U2 + V3 = 0$ .... (4)

$U3 + V3 = 7$ .... (5)

ولحل المعادلات السابقة نفترض ان قيمة اي متغير وليكن U1 تساوي صفر (وذلك لأن عدد المتغيرات اكبر من عدد المعادلات وكما هو معروف فإنه اذا كانت عدد المتغيرات اكبر من عدد المعادلات فإن بعض من هذه المتغيرات يجب ان يساوي صفر) بناء على ذلك نجد ان :

$O + V1 = 5 \Rightarrow V1 = 5$

$O + V2 = 1 \Rightarrow V2 = 1$

$U2 + 1 = 4 \Rightarrow U2 = 4 - 1 = 3$

$3 + V3 = 0 \Rightarrow V3 = -3$

$U3 + (-3) = 7 \Rightarrow U3 = 10$

أي ان قيم المتغيرات هي:

$$U1 = 0 \ , \ U2 = 3 \ , \ U4 = 10$$
$$V1 = 5 \ , \ V2 = 1 \ , \ V3 = -3$$

وعلى ذلك يتم تقييم الخلايا الفارغة في الجدول (١٧) وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة كما يلي :

التكلفة غير المباشرة للخلية (S1,D3) $= C13 - U1 - V3$

$= 8 - 0 - (-3) = 8 + 3 = 11$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S2,D1) $= C21 - U2 - V1$

$= 2 - 3 - 5 \quad = -6$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S3,D1) $= C31 - U3 - V1$

$= 3 - 10 - 5 = -12$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S3,D2) $= C32 - U3 - V2$

$= 6 - 10 - 1 \quad = -5$

وبمقارنة النتائج اعلاه مع ما سبق لنا الحصول عليه عند تقييم جدول الحل الاولي باستخدام طريقة المسار المتعرج يتضح لنا تطابق النتائج في الطريقتين.

لذا يتم عمل جدول نقل جديد عن طريق شغل الخلية (S3,D1) باعتبارها صاحبة اكبر رقم سالب.

وتتم عملية شغل هذه الخلية طبقا لما سبق شرحه في طريقة المسار المتعرج. وتتوالي عملية اختبار المثالية بكل جدول جديد بطريقة التوزيع المعدلة وبنفس الخطوات السابق ذكرها.

تمـــارين

س١ : احدى الشركات ترغب بنقل عدد من السلع الى عدد مـن المراكـز التسـويقية، فإذا كانت الشركة تمتلك عدد من المصانع في مناطق مختلفة وان تكاليف النقل للسلع والكميات المطلوبة من قبل المراكز والكميات المتاحة لدى المصانع معطاة في جدول النقل التالي :

مراكز الطلب

المصانع

	D1	D2	D3	D4	العرض
F1	6	7	8	9	700
F2	5	2	4	4	600
F3	7	2	6	7	300
F4	3	6	7	8	150
الطلب	100	250	400	1000	1750

أوجد الحل الاولي باستخدام :

أ – طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ب– طريقة اقل التكاليف.

جـ– طريقة فوجل التقريبية.

س٢: ليكن لديك جدول النقل التالي :

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	1	3	2	5
S2	3	2	6	~~8~~ 10
S3	3	5	4	~~7~~ 5
الطلب	~~5~~ 7	~~5~~ 3	10	

أ - اوجد الحل الاولي باستخدام طريقة اقل التكاليف.

ب- اوجد الحل الامثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

جـ- اوجد الحل الامثل باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

س٣: في احدى البلدان يوجد ثلاث مراكز لاستخراج احدى المواد الخام تبلغ الطاقة الانتاجية السنوية لمركز الاستخراج الاول 130 الف طن وللثاني 50 ألف طن وللثالث 150 ألف طن. تنقل هذه المادة الخام الى اربعة مؤسسات صناعية حيث يجري تصنيعها. وتستهلك المؤسسة الاولى 40 ألف طن سنويا والثانية 90 ألف طن أما المؤسسة الثالثة فتستهلك 80 ألف طن سنويا بينما الرابعة 120 ألف طن سنويا.

الجدول التالي يبين نفقات نقل الطن الواحد من هذه المادة من أي من مراكز الانتاج الثلاثة الى أي مؤسسة صناعية.

المؤسسات الصناعية

مراكز الاستخراج

	1	2	3	4	العرض
A	20	17	15	10	130
B	16	14	18	13	50
C	12	15	11	19	150
الطلب	40	90	80	120	

ابحث عن الخطة المثلى التي تؤمن المادة الخام وتحقق اقل قدر ممكن من تكاليف النقل لهذه المادة.

س٤: تنتج احدى الشركات منتجا واحدا متماثلا في ثلاثة مصانع هي F3, F2, F1 وتمتلك الشركة ثلاثة مراكز للتوزيع هي S3, S2, S1 وتبلغ طاقات المصانع الثلاثة في الشهور الستة القادمة 800 ,600 ,1000 وحدة على التوالي كما تبلغ احتياجات مراكز التوزيع الثلاثة عن نفس الفترة التخطيطية 500 ,700 ,1200 على التوالي. وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المصانع المختلفة الى مراكز التوزيع المختلفة كالاتي :

مراكز الطلب

المصادر

	S1	S2	S3	العرض
F1	80	60	90	800
F2	100	120	70	600
F3	40	50	30	1000
الطلب	500	700	1200	

ما هي الخطة المثلى لنقل المنتجات من المصانع الى مراكز التوزيع.

الوحدة السادسة

مشاكل التعيين

The Assignment Problems

الوحدة السادسة

مشاكل التعيين The Assignment Problems

يمكن القول أن مشاكل التعيين هي عبارة عن حالة خاصة من مشاكل النقل، وتتعلق بتعيين عدد معين من الأجهزة او العمال لانجاز عدد من الوظائف وذلك عن طريق تعيين جهاز واحد أو عامل واحد لوظيفة واحدة. وهذا يتطلب تساوي عدد الأجهزة مع عدد الوظائف. والمشكلة هنا تتعلق باختيار افضل تعيين بحيث يؤدي ذلك الى تخفيض التكاليف او تعظيم الارباح.

طرق حل مشاكل التعيين :

هناك عدة طرق متبعة لحل مشاكل التعيين منها :

١- طريقة العد الكامل Complete Enumeration Method
٢- الطريقة الهنغارية Hungarian Method
٣- طريقة البرمجة الخطية Linear Programming Method (simplex)
٤- طريقة النقل Transportation Method

١- طريقة العد الكامل : Complete Enumeration Method

في هذه الطريقة نحدد جميع البدائل لتوزيع عدد معين من العمال على عدد معين من الوظائف، ثم نختار البديل المناسب الذي يؤدي الى تخفيض التكاليف أو تعظيم الارباح.

ويمكن ايجاد عدد البدائل باستخدام مبدأ طرق العد. فاذا كان لدينا عدد من العمال يساوي N فان عدد البدائل يساوي !N ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي :

مثال ١ :- **(تخفيض التكاليف) :**

ليكن لدينا ثلاثة أجهزة (C,B,A) لانجاز ثلاث وظائف (1 ,2 ,3). وكانت تكاليف انجاز هذه الوظائف على هذه الاجهزة بالدينار الاردني معطاة في الجدول التالي :

الاجهزة	الوظائف		
	1	2	3
A	16	8	14
B	10	4	8
C	8	2	10

المطلوب : استخدم طريقة العد الكامل لتحديد افضل تعيين لتقليل التكاليف.

الحل : عدد الاجهزة = 3 ، لذا فان عدد البدائل = !3 = 6

الجدول التالي يعطي البدائل الستة ، والتكاليف الناتجة عن كل بديل :

البدائل	الاجهزة			اجمالي التكاليف
	A	**B**	**C**	
1	1	2	3	$16 + \cancel{8}\,4 + 1\cancel{4}0 = \cancel{38}\;30$
2	1	3	2	16 + 8 + 2 = 26
3	2	1	3	8 + 10 + 10 = 28
4	2	3	1	8 + 8 + 8 = 24
5	3	1	2	14 + 10 + 2 = 26
6	3	2	1	14 + 4 + 8 = 26

يلاحظ من الجدول ان افضل البدائل هو البديل رقم 4 وهو تعيين :

الجهاز (A) لانجاز الوظيفة (2)
الجهاز (B) لانجاز الوظيفة (3)
الجهاز (C) لانجاز الوظيفة (1)

بحيث يعطي اجمالي التكاليف : J.D 8 + 8 + 8 = 24

مثال :- (تعظيم الارباح) :

شركة ترغب في تعيين ثلاث عمال لانجاز ثلاث وظائف فاذا كانت الارباح الناجمة عن القيام بهذه الوظائف مبينة في الجدول التالي :

العمال	الوظائف		
	1	2	3
A	6	15	4
B	9	7	6
C	7	1	11

المطلوب : استخدم طريقة العد الكامل لتحديد افضل تعيين يحقق اعظم ربح ممكن.

الحل : عدد البدائل = !3 = 6

الجدول التالي يعطي البدائل الستة، والارباح الناتجة عن كل بديل :

البدائل	العمال			الارباح
	A	B	C	
1	1	2	3	6 + ~~15~~ 7 + ~~3~~ 11 = 24
2	1	3	2	6 + 6 + 1 = 13
3	2	1	3	15 + 9 + 11 = 35
4	2	3	1	15 + 6 + 7 = 28
5	3	1	2	4 + 9 + 1 = 14
6	3	2	1	4 + 7 + 7 = 18

الحل الامثل والذي يحقق اعظم ربح ممكن هو عند اجراء التعيين التالي :-

العامل (A) ينجز الوظيفة (2)
العامل (B) ينجز الوظيفة (1)
العامل (C) ينجز الوظيفة (3)

هذه الطريقة قد تبدو بسيطة خاصة اذا كان عدد الوظائف قليل لا يتجاوز ٣ وظائف ولكن اذا كانت المشكلة تتعلق باربعة وظائف مثلا فان عدد البدائل يساوي (٢٤) بديلا وفي حالة خمسة وظائف فان عدد البدائل يساوي (١٢٠) بديلا وهكذا وكلما زادت البدائل كلما اصبحت هذه الطريقة غير عملية.

لذلك يمكن استخدام طريقة اخرى بديلة تمكنا من تقييم البدائل دفعة واحدة وهي الطريقة الهنغارية.

٢- الطريقة الهنغارية (المجرية) Hungarian Method

خطوات تطبيق هذه الطريقة لاقل التكاليف هي :

١- يطرح أقل قيمة في كل صف من باقي القيم في ذلك الصف.

٢- ثم نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي القيم في ذلك العمود.

٣- نغطي الاصفار (في الصفوف والاعمدة) باقل عدد ممكن من المستقيمات.

٤- اذا كان عدد المستقيمات يساوي عدد صفوف الجدول فإننا نكون قد وصلنا الى الحل ونقوم بعملية التعيين بأخذ القيمة الاصلية المناظرة للصفر في الجدول.

٥- اذا كان عدد المستقيمات اقل من عدد صفوف الجدول، فإننا نختار اقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من كل القيم غير المغطاة. ونضيف هذه القيمة الى نقاط تقاطع المستقيمات.

٦- يجري تكرار التغطية حتى يتم التوصل الى عدد مستقيمات مساوي لعدد الصفوف أو الاعمدة.

* **ملاحظة** : في حالة الارباح يتم اولا طرح جميع القيم من أعلى قيمة في الجدول، ومن ثم نطبق الخطوات السابقة.

مثال :- **(تخفيض التكاليف).**

ترغب ادارة إحد المصانع في تعيين عدد من الاشخاص لانجاز عدد من الوظائف فاذا كان عدد العمال اربعة وكانت تكاليف انجاز هذه الوظائف بالدينار الاردني معطاة في الجدول التالي :

العمال	الوظائف			
	1	2	3	4
A	5	6	2	4
B	9	5	1	9
C	1	2	6	1
D	7	6	15	12

المطلوب : استخدم الطريقة الهنغارية لايجاد افضل تعيين ليحقق اقل تكلفة.

١- نطرح اقل قيمة في كل عمود من باقي القيم في ذلك العمود.

٢- نطرح اقل قيمة في كل صف من باقي القيم في ذلك الصف.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	4	4	1	3
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	6	4	14	11

طرح الأعمدة

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

طرح الصفوف

٣- نغطي كل صف وكل عمود يحتوي على صفر فأكثر بأقل عدد ممكن من المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

٤- وحيث ان عدد المستقيمات (الافقية والعمودية) أقل من عدد صفوف الجدول، لذا نختار اقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحه من باقي القيم غير المغطاة، ونضيفه الى نقاط تقاطع المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	1	3	0	0
B	6	3	0	6
C	0	2	7	0
D	0	0	10	5

بهذه الخطوة نكون قد وصلنا الى الحل الامثل ويتم اختيار الحل كالتالي :

اختيار الصفر الوحيد في اي صف أو عمود أولا ويشطب اي صفر آخر في ذلك الصف أو العمود.

- في الصف الأول نختار الصفر (A4) ويشطب باقي الاصفار في العمود الرابع.
- في الصف الثاني نختار الصفر (B3) ويشطب باقي الاصفار في العمود الثالث.
- في الصف الثالث نختار الصفر (C1) ويشطب باقي الاصفار في العمود الأول.

وأخيرا في الصف الرابع نختار الصفر (D2)

وعلى هذا الاساس يتم :

١- تعيين العامل (A) لانجاز الوظيفة (4) .
٢- تعيين العامل (B) لانجاز الوظيفة (3) .
٣- تعيين العامل (C) لانجاز الوظيفة (1) .
٤- تعيين العامل (D) لانجاز الوظيفة (2) .

وبالتالي فإن اجمالي التكاليف من الجدول الاصلي والناجمة عن هذا التعيين هو :

$$4 + 1 + 1 + 6 = 12 \text{ J.D}$$

مثال :- **(تعظيم الارباح) :**

مؤسسة تجارية ترغب في تعيين عدد من العمال لانجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال اربعة وكانت الارباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي :

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	6	15	4	5
B	9	7	6	1
C	5	11	1	7
D	14	18	9	10

المطلوب : ايجاد الحل المثالي، ومجموع الارباح لهذه الحل.

الحل :-

١- لأن المسألة ارباح، لذا يتم طرح جميع الارقام من أعلى رقم في الجدول وهو (18).

الوظائف

		1	2	3	4
	A	12	3	14	13
العمال	B	9	11	12	17
	C	13	7	17	11
	D	4	0	9	8

٢- طرح اقل رقم في كل صف لا يوجد به صفر من باقي الارقام في الصف.

الوظائف

		1	2	3	4
	A	9	0	11	10
العمال	B	0	2	3	8
	C	6	0	10	4
	D	4	0	9	8

٣- طرح اقل رقم في كل عمود لا يوجد به صفر من باقي الارقام في العمود.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	9	0	8	6
B	0	2	0	4
C	6	0	7	0
D	4	0	6	4

٤- نغطي كل صف وكل عمود يحتوي على صفر باقل عدد من المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	9	0	8	6
B	0	2	0	4
C	6	0	7	0
D	4	0	6	4

٥- وحيث أن عدد المتسقيمات (الافقية والعمودية) اقل من عدد صفوف الجدول، لذا نختار اقل رقم من الارقام غير المغطاه وهو 4 ونطرحه من جميع الارقام غير المغطاه ونضيفه الى نقاط تقاطع المستقيمات، لينتج لدينا الجدول التالي:

الوظائف

العمال		1	2	3	4
	A	5	0	4	2
	B	0	6	0	4
	C	6	4	7	0
	D	0	0	5	0

الحل المثالي هو :

تعيين العامل (A) لانجاز الوظيفة (2) .
تعيين العامل (B) لانجاز الوظيفة (3) .
تعيين العامل (C) لانجاز الوظيفة (4) .
تعيين العامل (D) لانجاز الوظيفة (1) .

مجموع الارباحا للحل المثالي (من الجدول الاصلي)

$$15 + 6 + 7 + 14 = 42$$

مثال :- إذا كان في مصنع أربع الات لانتاج أربع انواع من السلع بحيث أن كل آلة من الالات تعطي قدرة انتاجية لكل نوع من السلع كما في الجدول الآتي :

السلع

الالات		1	2	3	4
	A	5	9	7	8
	B	3	2	3	5
	C	7	9	10	10
	D	6	5	6	4

فما هي أعلى قدرة انتاجية اذا كانت كل آلة تنتج واحد من هذه السلع ؟

الحل :

نرى أن المراد هنا ايجاد اعلى عائد ولذلك نأخذ أعلى قيمة ونطرح منها كل القيم الأخرى في الجدول ليتكون لدينا الجدول التالي :

سلع

الالات

	1	2	3	4
A	5	1	3	2
B	7	8	7	5
C	2	1	0	0
D	4	5	4	6

الآن نتعامل مع هذا الجدول على أنه أقل تكلفة، فنطـرح أقل قيمـة مـن كل صف ليصبح.

آلة

	1	2	3	4
A	4	0	2	1
B	2	3	2	0
~~C~~	~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~D~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~2~~

ليس هناك داعي لأن نطرح أقل قيمة من كل عمود وذلـك لان كـل الاعمـدة تحتـوي اصفار فنغطي كل صـف أو عمـود يحتـوي اصفـار بـاقل قـدر ممكـن مـن الخطـوط فيكون أعلى انتاج اذا كان:

$A2 , B4 , C3 , D1$

وتكون اكبر قدرة انتاجية هي : $4 + 5 + 10 + 6 = 30$

ملاحظة : في الطريقتين الثالثة والرابعة نتعامل مع النموذج على أن المشكلة نقل وبالتالي تعتبر قيم العرض كلها تساوي واحد وقيم الطلب كلها تساوي واحد فعلى سبيل المثال اذا كان لدينا نموذج مكون من ثلاث صفوف وثلاثة أعمدة فإنه يصبح كالآتي :

	1	2	3	العرض
A	A1	A2	A3	1
B	B1	B2	B3	1
C	C1	C2	C3	1
الطلب	1	1	1	

ويكون نموذج البرمجة الخطية لهذا النموذج كالآتي : دالة الهدف :

$$\text{Max (Min) } Z = A1 + A2 + A3 + B1 + B2 + B3 + C1 + C2 + C3$$

Subject to,

$$A1 + A2 + A3 = 1$$
$$B1 + B2 + B3 = 1$$
$$C1 + C2 + C3 = 1$$
$$A1 + B1 + C1 = 1$$
$$A2 + B2 + C2 = 1$$
$$A3 + B3 + C3 = 1$$

وكما نلاحظ من القيود ودالة الهدف فإن هذا النموذج صعب الحل ولذلك تعتبر هذه الطريقة طريقة غير عملية ولا تستخدم في الحياة العملية. أما بالنسبة لطريقة النقل فإننا نتعامل مع الجدول السابق على أنه مشكلة نقل ونجد الحل الابتدائي بإحدى الطرق الثلاث المعروضه في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل.

تمـــــارين

س١: أوجد الحل الأمثل لمشكلة التعيين التالية بطريقة العد الكامل :

	1	2	3	4
A	3	9	2	3
B	6	1	5	6
C	9	4	7	10
D	2	5	4	2

أ- لتخفيض التكاليف.

ب- لتعظيم الأرباح.

س٢: أوجد الحل الأمثل لمشكلة التعيين التالية بالطريقة الهنجارية :

الفنيون	الالات				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
A	2	4	3	7	1
B	8	3	2	5	6
C	10	5	7	9	8
D	7	6	5	8	9
E	2	5	4	3	2

أ- لتخفيض التكاليف.

ب- لتعظيم الارباح.

س٣: في شركة صناعية اذا أردنا تعيين أربع فنيين على أربع الات بحيث أن الفنـي الأول لا يستطيع تشغيل الآلة الرابعة والفني الثالث لا يستطيع تشغيل الآلة الثانية وكانت تكلفة تعيين كل فني على كل آلة معطاة في الجدول التالي :

الفنيون	الآلات			
	1	2	3	4
A	2	5	3	-
B	4	2	3	7
C	2	-	5	6
D	3	5	4	1

فأوجد أفضل تعيين : أ- بالطريقة الهنجارية ب- بطريقة العد الكامل

س٤: اذا كان رئيس قسم الحاسوب في إحدى الجامعات الأردنية لديه ست محاضرين يدرسون ست مواد مختلفة فاذا كانت قدرة الاستاذ النسبية لتدريس كل مادة من هذه المواد معطاه في الجدول التالي :

المحاضرون	المواد					
	1	2	3	4	5	6
A	70	80	70	90	75	60
B	60	75	90	80	70	90
C	80	50	85	65	70	70
D	80	50	85	65	70	75
E	80	85	65	70	90	80
F	70	60	50	90	80	70

فما هو أفضل توزيع لهؤلاء المحاضرين على هذه المواد بحيث تعطى أعلى نسبة نجاح للطلاب باستخدام الطريقة الهنجارية.