المحاضرة الخامسة

معادلات تفاضلية عادية (208 ر)

المستوى الثانى (علوم الحاسب - الرياضيات - الفيزياء – الجيوفيزياء)

الحلول الأساسية للمعادلات المتجانسة:

لنعتبر المعادلة التفاضلية

$$L[y(x)] = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

حيث $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة $\alpha < x < \beta$ والمؤثر $L[y(x)]$ يعرف كالآتي:

$$L[y(x)] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] y(x)$$

فمثلاً:

$$L[x^2] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right] x^2$$

$$= 2 + 2x\,p(x) + x^2 q(x)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة (1) باستخدام المؤثر $L[.]$ كالآتي:

$$L[y(x)] = 0 \qquad (1)$$

نظرية (1):

إذا كانت $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإن التعبير الخطي

$$c_1\,y_1 + c_2\,y_2$$

هو أيضاً حل للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثوابت.

البرهان:

بما أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإن

$$L[y_1(x)] = 0, \qquad L[y_2(x)] = 0$$

الأيسر من $(1) = L[c_1y_1 + c_2y_2]$

$$= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

$= c_1(0) + c_2(0) = 0 = (1)$ الأيمن من

أي أن $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ هو حل للمعادلة (1). و هو المطلوب.

نظرية (2):

إذا كانت $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة $\alpha < x < \beta$ وكانت $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) بحيث أن:

$$y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0, \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta) \qquad (2)$$

فإن التعبير

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

هو الحل العام للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثوابت.

ملحوظة:

يلاحظ أن الشرط (2) هو:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

وسوف نسمي هذا المحدد بـ Wronskian نسبة إلى العالم البولندي Wronski ويرمز له

بالرمز

$$W(x) = W(y_1, y_2)$$

نظرية (3):

إذا كانت الدوال $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) وإذا كانت $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإنه إما أن

$$W(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta)$$

أو $W(x) \neq 0$ وذلك لأي نقطة x داخل الفترة (α, β).

بمعنى أنه لا توجد نقطة x داخل الفترة (α, β) تتلاشى عندها W.

البرهان:

حيث أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) إذن

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

بضرب الأولى في y_2 - والثانية في y_1 والجمع يكون

$$\left(y_1y_2'' - y_2y_1''\right) + p\left(y_1y_2' - y_1'y_2\right) = 0 \qquad (*)$$

وحيث أن:

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2$$

فإن:

$$\frac{dW}{dx} = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$\frac{dW}{dx} + pW = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة

$$W(x) = ce^{-\int^{x} p(x)dx} \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل

وحيث أن الدالة الأسية لا تساوي صفراً فإن $W(x)$ لا تساوي صفراً عند أي نقطة إلا إذا كانت $c = 0$ وإذا كانت $c = 0$ فإن $W(x) = 0$ لجميع قيم x. وهو المطلوب.

نظرية (4):

إذا كانت الدوال $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) وكان $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة (1) وكانت $W(y_1, y_2) \neq 0$ فإن $y_1(x), y_2(x)$ هما دالتان غير مرتبطتان خطياً (linearly independent) ويكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$

البرهان:

سوف نثبت أنه إذا كانت $W(x) \neq 0$ فإن y_1, y_2 دوال مستقلة خطياً.

نضع

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$$

بإجراء التفاضل

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0$$

وبحل المعادلتان المتجانستان الأخيرتان في المجهولين c_1, c_2 فإن محددة المعاملات

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

أي أن الحل الوحيد للمعادلتين الأخيرتين هو الحل الصفري، أي

$$c_1 = c_2 = 0$$

وعلى ذلك يكون y_1, y_2 مستقلان خطياً (وذلك إذا كان $W \neq 0$).

وقد بينا من النظرية السابقة أن التركيبة الخطية

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

هي أيضاً حل للمعادلة (1). وهو المطلوب.

نظرية (5):

إذا كانت $y_1(x)$ هي أحد حلي المعادلة (1) فإن الحل الثاني $y_2(x)$ للمعادلة (1) يحقق العلاقة

$$y_2(x) = y_1(x)\int^x \frac{W(x)}{y_1^2(x)}\,dx \qquad (4)$$

حيث

$$W(x) = ce^{-\int^x p(x)dx} \qquad (3)$$

وعلى ذلك يمكن حساب $W(x)$ من (3) واستخدام (4) لإيجاد الحل الثاني إذا علم الحل الأول.

ويلاحظ أن y_1, y_2 مستقلان خطياً. (أثبت ذلك).

مثال (1):

بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0; \qquad -1 < x < 1$$

ثم أوجد الحل الثاني.

الحـل

حيث أن

$$y_1'(x) = 1, \qquad y_1''(x) = 0$$

الأيسر من المعادلة $= \text{zero} - 2x + 2x$

$= \text{zero} =$ الأيمن من المعادلة

أي أن $y_1 = x$ هو حل للمعادلة ولإيجاد الحل الثاني نكتب المعادلة على الصورة (1) أي أن:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$$p(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\therefore\ W(x) = c\exp\left(-\int^x \frac{2x}{x^2-1}dx\right)$$

$$= c\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right)$$

$$= \frac{c}{x^2-1}$$

$$y_2(x) = cx\int \frac{1}{x^2(x^2-1)}dx$$

$$= cx\int\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= cx\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}$$

$$= c+\frac{cx}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

هي معادلات على الصورة:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \qquad (1)$$

حيث a, b, c ثوابت.

سوف نحاول أن نوجد الحل في الصورة e^{rx} حيث r ثابت مطلوب تعيينه. لذلك نفرض أن:

$$y=e^{rx}$$

وعلى ذلك يكون

$$y'=re^{rx}, \qquad y''=r^2e^{rx}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (1) يكون

$$e^{rx}\left(ar^2+br+c\right)=0$$

وحيث أن $e^{rx}\neq 0$ فإن:

$$ar^2+br+c=0$$

وهي تسمى بالمعادلة المميزة حلها يكون:

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وتكون قيمتي r متساويتان إذا كانت $b^2-4ac=0$

وتكون قيم r حقيقية مختلفة إذا كانت $b^2-4ac>0$

وتكون قيم r تخيلية (مترافقة) إذا كانت $b^2-4ac<0$

وسوف ندرس كل حالة على حدة.

أولاً: إذا كانت r حقيقية، $r_1\neq r_2$

حيث

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن:

$$y_1=e^{r_1x}, \qquad y_2=e^{r_2x}$$

دوال مستقلة، وعلى ذلك هما الحلان الأساسيان للمعادلة التفاضلية (1) كالآتي:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x}\end{vmatrix}$$

$$W(y_1,y_2;x)=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x}$$

وحيث أن $r_1-r_2\neq 0$ لذلك فإن $W\neq 0$. لذلك فإن الحلان مستقلان ويكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$y(x)=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

مثال (1):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

الحــل

نفرض أن $y = e^{rx}$ وعلى ذلك يكون

$$y' = re^{rx}, \qquad y'' = r^2 e^{rx}$$

والمعادلة المميزة بالصورة

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$r_1 = -2, \qquad r_2 = -3$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً: إذا كانت $b^2 - 4ac = 0$ فإن:

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

وعلى ذلك يكون أحد الحلول هو:

$$y_1 = e^{\frac{-b}{2a}x}$$

ويكون المطلوب الآن إيجاد الحل الثاني والذي يكون مستقل خطياً عن y_1. كما سبق فإن:

$$W(y_1, y_2; x) = e^{-\int \frac{b}{a} dx} = e^{\frac{-b}{a}x}$$

ويكون:

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\frac{-b}{a}x}} dx = y_1 \int dx = x y_1(x) = x e^{\frac{-b}{2a}x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 x y_1$$
$$= (c_1 + c_2 x) y_1$$

مثال (2):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

الحــل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = -2$$

$$y_1(x) = e^{-2x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}.$$

ثالثاً: إذا كانت $b^2 - 4ac < 0$

فإن جذري المعادلة المميزة في هذه الحالة هما جذران مركبان مترافقان (وذلك لأن a, b, c ثوابت حقيقية). ونفرض أنهما على الصورة:

$r_1 = \lambda + i\mu ,\qquad r_2 = \lambda - i\mu$

حيث λ , μ كميات حقيقية، $i = \sqrt{-1}$.

والآن نترك ذلك جانباً وسوف نعود لـ r_1, r_2 بعد قليل ولنبدأ بتعريف الدالة

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (*)$$

ويلاحظ أن:

$$f(0) = 1$$

بتفاضل (*) بالنسبة إلى θ يكون

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$= i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= i f$$

$$\frac{df}{f} = i d\theta$$

بإجراء تكامل الطرفين، يكون

$$\ln f = i\theta + c$$

حيث أن $\theta = 0$ عندما $f = 1$ ومنها فإن $c = 0$ وعلى ذلك يكون

$$\ln f = i\theta$$

$$\therefore\ f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

والعلاقة الأخيرة تسمى بصيغة أويلر Euler's formula وعلى ذلك يكون:

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i\sin x = e^{-ix}$$

بالجمع والطرح يكون:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

نعود الآن للمعادلة المميزة التي جذراها r_1, r_2 فإن الحلان للمعادلة التفاضلية هما

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\lambda x + i\mu x}$$

$$y_2 = e^{\lambda x - i\mu x}$$

ولكي نبين أن هذان الحلان مستقلان فإن:

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x}$$

$$\neq 0$$

لأن $r_1 \neq r_2$ وعلى ذلك فإن y_1, y_2 حلان مستقلان خطياً.

نعود الآن للحل العام الذي يأخذ الصورة:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 e^{(\lambda + i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x}$$

$$= e^{\lambda x}\left(c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}\right)$$

$$= e^{\lambda x}\left\{c_1(\cos\mu x + i\sin\mu x) + c_2(\cos\mu x - i\sin\mu x)\right\}$$

$$= e^{\lambda x}\left\{(c_1 + c_2)\cos\mu x + i(c_1 - c_2)\sin\mu x\right\}$$

$$= e^{\lambda x}\left\{c_1\cos\mu x + c_2\sin\mu x\right\}.$$

مثال (3):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + y' + y = 0$$

الحـل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$\therefore \quad r = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{-1}{2}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$$