المحاضرة السادسة

معادلات تفاضلية عادية (208 ر)

المستوى الثاني (علوم الحاسب - الرياضيات - الفيزياء – الجيوفيزياء)

معادلة أويلر Euler's Equation

هي معادلات على الصورة:

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \qquad (1)$$

حيث α, β ثوابت عددية.

ملحوظة:

يلاحظ أن نقطة الأصل هي regular singular ولكننا لن نتعرض لنقط الشذوذ في هذا المقرر وعلى ذلك فإن المعادلة (1) لها حل في أي فترة لا تحتوي على نقطة الأصل. وعلى ذلك فإننا سوف نبحث عن الحل في الصورة:

$$y=x^r, \qquad x>0$$

حيث r ثابت مطلوب تعيينه. على ذلك يكون:

$$y'=rx^{r-1}, \qquad y''=r(r-1)x^{r-2}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (1) يكون

$$x^r\{r(r-1)+\alpha r+\beta\}=0$$

وحيث أن $x^r\neq 0$ فإن:

$$r(r-1)+\alpha r+\beta=0$$

وحلها هو:

$$r=\frac{1}{2}\left[-(\alpha-1)\pm\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}\right]$$

وهناك ثلاث حالات جديرة بالاعتبار

أولاً: إذا كانت $(\alpha-1)^2-4\beta>0$

فإن:

$$r_1\neq r_2$$

وعلى ذلك فإن الحلان هما

$$y_1=x^{r_1}, \qquad y_2=x^{r_2}$$

ويمكن بسهولة إثبات أنهما مستقلان خطياً وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

مثال (1):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$2x^2y''+3xy'-y=0; \qquad x>0$$

الحل

بالتعويض عن $y=x^r$ نحصل على:

$$x^r\left(2r^2+r-1\right)=0$$

$$\therefore\ 2r^2+r-1=0$$

$$\therefore\ r_1=\frac{1}{2}, \qquad r_2=-1$$

وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة:

$$y(x)=c_1\sqrt{x}+\frac{c_2}{x}, \qquad \forall\ x>0$$

ثانياً: إذا كانت $(\alpha-1)^2-4\beta=0$

في هذه الحالة تكون

$$r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$$

وأحد الحلول يأخذ الصورة

$$y_1(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

ولإيجاد الحل المستقل الآخر نحسب W من المعادلة (1)

$$W(y_1,y_2;x) = e^{-\int \frac{\alpha}{x}dx} = e^{-\alpha \ln x} = x^{-\alpha}$$

وعلى ذلك فإن الحل الثاني y_2 هو

$$y_2(x) = y_1\int \frac{W}{y_1^2}dx = y_1\int\frac{x^{-\alpha}}{x^{1-\alpha}}dx = y_1\int\frac{dx}{x} = y_1 \ln x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$

$$= (c_1 + c_2\ln x)\, y_1(x)$$

$$= (c_1+c_2\ln x)\,x^r$$

مثال (2):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x>0$$

الحـل

بالتعويض عن $y = x^r$ ومشتقاتها يكون

$$x^r(r^2+4r+4)=0$$

والمعادلة المميزة هي:

$$r^2+4r+4=0$$

$$\therefore\ r_1=r_2=-2$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو:

$$y(x)=\frac{1}{x^2}(c_1+c_2\ln x)$$

ثالثاً: إذا كانت $(\alpha-1)^2-4\beta<0$

في هذه الحالة فإن r_1, r_2 هما عددان مركبان مترافقان وذلك إذا كانت $\alpha\ ,\ \beta$ أعداد حقيقية.

نفرض أن:

$$r_1=\lambda+i\mu\ , \qquad r_2=\lambda-i\mu$$

وسوف نشرح معنى x^r في حالة إذا ما كانت r عدد مركب.

نعلم أن

$$x^r = e^{r\ln x}$$

$$\therefore\ x^{\lambda+i\mu} = e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x}.e^{i\mu\ln x}$$

$$= x^\lambda e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^\lambda\{\cos(\mu\ln x)+i\sin(\mu\ln x)\}$$

نعود الآن للحل العام لمعادلة أويلر حيث

$$y_1(x)=x^{r_1}, \qquad y_2(x)=x^{r_2}$$

(حيث y_1, y_2 حلول مستقلة خطياً)

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

$$= c_1 x^{(\lambda+i\mu)} + c_2 x^{(\lambda-i\mu)}$$

$$= x^r[c_1\cos(\mu\ln x)+c_1 i\sin(\mu\ln x)]$$
$$+ x^r[c_2\cos(\mu\ln x)-c_2 i\sin(\mu\ln x)]$$

$$= x^\lambda\{(c_1+c_2)\cos(\mu\ln x)+i(c_1-c_2)\sin(\mu\ln x)\}$$

$$\therefore\ y(x)=x^\lambda\{c_1\cos(\mu\ln x)+c_2\sin(\mu\ln x)\}.$$

مثال (3):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2y''+2xy'+y=0\,; \qquad x>0$$

الحـل

نفرض أن $y=x^r$ ونعوض عنها وعن تفاضلاتها في المعادلة نحصل على

$$x^r[r(r-1)+2r+1]=0$$

$$\therefore\ r=\frac{-1\pm i\sqrt3}{2}$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{-1}{2}, \qquad \mu=\frac{\sqrt3}{2}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt x}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln x\right)\right].$$

المعادلات الغير متجانسة من الرتبة الثانية:

هي معادلات على الصورة:

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=g(x) \qquad (1)$$

حيث $p,\ q,\ g$ هي دوال متصلة (وذلك لضمان وجود الحل أو الحل الوحيد في حالة إضافة شرطان ابتدائيان).

لاحظ أن المعادلة (1) غير متجانسة لكون الطرف الأيمن منها لا تساوي الصفر.

تعريف:

تعرف المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) بأنها المعادلة

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0 \qquad (2)$$

نظرية:

الحل العام للمعادلة (1) هو مجموع التركيبة الخطية لحلين غير مرتبطان خطياً للمعادلة (2) مضافاً إليه حل خاص يحقق المعادلة (1).

البرهان:

نفرض أن $y_1(x),\ y_2(x)$ هما حلان مستقلان للمعادلة (2) ونفرض أن $y_p(x)$ هو أي حل يحقق المعادلة (1) والمطلوب إثبات أن الحل العام للمعادلة (1) هو $y(x)$ حيث:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x) \qquad (3)$$

حيث أن كل من $y_1,\ y_2$ هما حلان للمعادلة (2) فإنهما يحققانها أي أن:

$$\left.\begin{aligned} y_1''+py_1'+qy_1&=0\\ y_2''+py_2'+qy_2&=0\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

وحيث أن y_p يحقق (1) فإن:

$$y_p'' + p y_p' + q y_p = g(x) \qquad (**)$$

والآن لنبحث إذا ما كانت $y(x)$ المعطاة بالمعادلة (3) تحقق (1)

$$\text{الأيسر من (1)} = \left(c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p\right)'' + p(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p\right)'$$
$$+ q(x)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p\right)$$
$$= c_1\left(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1\right) + c_2\left(y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2\right)$$
$$+ \left(y_p'' + p(x) y_p' + q(x) y_p\right)$$

وباستخدام (**), (*) فإن:

$$\text{الأيسر من (1)} = c_1\text{zero} + c_2\text{zero} + g(x)$$
$$= g(x) = \text{الأيمن من (1)}$$

أي أن (3) هي الحل العام للمعادلة الغير متجانسة (1).

أولاً: إيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة الغير متجانسة بطريقة المعاملات الغير محددة:

نفرض أن:

$$g(x) = e^{\alpha x}\left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n\right)\begin{cases}\cos \beta x \\ \sin \beta x\end{cases}$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n, \beta, \alpha$ ثوابت، n صحيح غير سالب.

نبحث عن الحل الخاص y_p في الصورة:

$$y_p = e^{\alpha x}\left(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n\right)\cos \beta x$$
$$+ e^{\alpha x}\left(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n\right)\sin \beta x$$

حيث $A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$ ثوابت مطلوب تعيينها (لاحظ الفرق بين B_i, β)

ملاحظة هامة:

يلاحظ أنه لا يجب أن يكون أي حد من الحل الخاص على صورة أي من الحلين الأساسيان للمعادلة المناظرة المتجانسة.

وإن وجد أحد الحدود من الحل الخاص مماثلاً (على شكل) أحد الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة فإنه يجب ضرب الحل الخاص في x والأمثلة سوف توضح ذلك.

مثال (1):

أوجد الحل الخاص ثم الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = 4x^2$$

الحـل

يلاحظ أن المعادلة المناظرة المتجانسة هي:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

وحلولها الأساسية هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

ولإيجاد الحل الخاص يلاحظ أن:

$$g(x) = 4x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta = 0,\ n = 2$$

وعلى ذلك فإننا نبحث عن y_p بالصورة:

$$y_p = A_0 x^2 + A_1 x + A_2$$

وعليه

$$y_p' = 2A_0 x + A_1, \qquad y_p'' = 2A_0$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة الغير متجانسة يكون

$$2A_0 - 3(2A_0x + A_1) - 4(A_0x^2 + A_1x + A_2) = 4$$

وبمقارنة معاملات قوى x المختلفة يكون

$$A_0 = -1, \qquad A_1 = \frac{3}{2}, \qquad A_2 = \frac{-13}{8}$$

وعلى ذلك فإن y_p تصبح

$$y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

يلاحظ أنه لا يوجد حد في الحل الخاص على شاكلة e^{4x} أو e^{-x} (الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة) وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة الغير متجانسة هي:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

مثال (2):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$$

الحـل

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

وحلولها الأساسية هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

كذلك يلاحظ أن:

$$g(x) = 2\sin x$$

وعلى ذلك فإن:

$$n = 0,\ \beta = 1,\ \alpha = 0$$

وعلى ذلك نبحث عن الحل الخاص y_p بالصورة

$$y_p = A_0\cos x + B_0\sin x$$

وعليه يكون

$$y'_p = -A_0\sin x + B_0\cos x,$$

$$y''_p = -A_0\cos x - B_0\sin x$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة الغير متجانسة

$$-(A_0\cos x + B_0\sin x) - 3(-A_0\sin x + B_0\cos x)$$
$$-4(A_0\cos x + B_0\sin x) = 2\sin x$$

بمقارنة معاملات $\sin x, \cos x$ في الطرفين

$$-5A_0 - 3B_0 = 0, \qquad 3A_0 - 5B_0 = 2$$

$$\therefore A_0 = \frac{3}{17}, \quad B_0 = \frac{-5}{17}$$

أي أن الحل الخاص يأخذ الصورة:

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x)$$

والحل العام هو:

$$y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x).$$

مثال (3):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

الحــل

الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$\therefore\ \alpha = -1, \quad n = 0, \quad \beta = 0$$

لذلك نبحث عن y_p في الصورة الآتية:

$$y_p(x) = A_0 e^{-x}$$

$$\therefore\ y_p' = -A_0 e^{-x}, \qquad y_p'' = A_0 e^{-x}$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة يكون:

$$A_0 e^{-x} - 3\left(-A_0 e^{-x}\right) - 4A_0 e^{-x} = e^{-x}$$

وبمقارنة معاملات e^{-x} نجد أن:

$$0.e^{-x} = e^{-x}$$

وهذا غير معقول.

والخطأ هنا أن الحل الخاص الذي نبحث عنه بالصورة $A_0 e^{-x}$ ولكن e^{-x} هو أحد الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة. لذلك يجب ضرب الحل الخاص في x وعلى ذلك يجب أن نبحث عن الحل الخاص في الصورة الآتية:

$$y_p(x) = A_0 x e^{-x}$$

$$\therefore\ y_p'(x) = A_0(1-x)e^{-x}, \qquad y_p''(x) = A_0(-2+x)e^{-x}$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة التفاضلية يكون

$$A_0 e^{-x}\left[(x-2) - 3(1-x) - 4x\right] = e^{-x}$$

$$-5A_0 e^{-x} = e^{-x}$$

$$\therefore\ A_0 = -\frac{1}{5}$$

أي أن الحل الخاص بالصورة:

$$y_p = -\frac{x}{5}e^{-x}$$

والحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} - \frac{x}{5}e^{-x}$$

مثال (4):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 4y = xe^{x} + x\sin 2x$$

الحــل

الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y_1 = \sin 2x, \qquad y_2 = \cos 2x$$

وحيث أن:

$$g(x)=xe^{x}+x\sin 2x$$

لذلك نبحث عن الحل الخاص بالصورة:

$$y_p(x)=(A_0x+A_1)e^{x}+(B_0x+B_1)\cos 2x+(C_0x+C_1)\sin 2x$$

وحيث أن $\sin 2x, \cos 2x$ يظهران في الحلول الأساسية لذلك يجب ضرب هذا الجزء من الحل الخاص في x أي يجب أن نبحث عن y_p بالصورة:

$$y_p(x)=(A_0x+A_1)e^{x}+(B_0x^{2}+B_1x)\cos 2x+(C_0x^{2}+C_1x)\sin 2x$$

بحساب y'_p, y''_p والتعويض في المعادلة المعطاة ومقارنة المعاملات نحصل على:

$$A_0=\frac{1}{5},\qquad A_1=\frac{-2}{25}$$

$$B_0=\frac{-1}{8},\qquad B_1=0$$

$$C_0=0,\qquad C_1=\frac{1}{16}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x)=\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x+\frac{x}{16}\sin 2x-\frac{x^{2}}{8}\cos 2x+\frac{1}{25}(5x-2)e^{x}$$

طريقة تغيير البارامتر:

سوف نعطي طريقة أخرى لإيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x) \qquad (1)$$

حيث المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هي:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (2)$$

ونفرض أن الحلان الأساسيان المستقلان للمعادلة (2) هما:

$$y_1(x), \qquad y_2(x)$$

والحل العام للمعادلة (2) هو y_h حيث:

$$y_h=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

وهذه الطريقة تعتمد على أننا نفرض أن الثوابت c_1, c_2 دوال في المتغير x وذلك لإيجاد الحل الخاص، أي أننا سوف نبحث عن الحل الخاص y_p في الصورة:

$$y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

ولإيجاد y_p يجب أن نوجد $u_1(x), u_2(x)$ يلاحظ أن y_p وتفاضلاتها يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) وحيث أن y_p بها مجهولين هما $u_1(x), u_2(x)$ لذلك يحق لنا أن نضع شرط واحد على الدوال u_1, u_2 وهذا الشرط اختياري وسوف نختاره بحيث يسهل الحسابات. لذلك:

$$y'_p=(u'_1y_1+u'_2y_2)+(u_1y'_1+u_2y'_2)$$

وكما قلنا سوف نختار الشرط الآتي لتسهيل الحسابات لذلك نفرض أن:

$$u'_1y_1+u'_2y_2=0 \qquad (3)$$

وباستخدام (3) فإن y''_p تأخذ الصورة:

$$y''_p=u'_1y'_1+u'y'_2+u_1y''_1+u_2y''_2$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة (1) يكون:

$$\begin{aligned}&u_1\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right)+u_2\left(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right)\\&+u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x)\end{aligned}$$

وحيث أن y_1, y_2 هما حلان للمعادلة المتجانسة (2) فإن:

$$u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x) \qquad (4)$$

بحل المعادلتين (3), (4) في المجاهيل u_1', u_2' نحصل على

$$u_1'=\frac{-y_2 g}{y_1y_2'-y_1'y_2}, \qquad u_2'=\frac{y_1 g}{y_1y_2'-y_1'y_2}$$

يلاحظ أن

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2\neq 0$$

مما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية:

إذا كانت $p(x), q(x), g(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) في المعادلة التفاضلية (1) وكان y_1, y_2 هما الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة (2) فإن الحل الخاص y_p للمعادلة (1) يكون بالصورة:

$$y_p(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)}dx \qquad (5)$$

مثال (1):

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y''+y=\sec x; \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

الحل

المعادلة المتجانسة المناظرة

$$y''+y=0$$

وحلولها الأساسية هما:

$$y_1=\cos x, \qquad y_2=\sin x$$

وعلى ذلك

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$$

وباستخدام (5) فإن y_p تصبح

$$\begin{aligned}y_p&=-\cos x\int\sin x\sec x\,dx+\sin x\int\cos x\sec x\,dx\\&=\cos x\ln(\cos x)+x\sin x\end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو

$$\begin{aligned}y(x)&=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln(\cos x)+x\sin x\\&=(c_1+\ln(\cos x))\cos x+(c_2+x)\sin x\end{aligned}$$

مثال (2):

أوجد الحل الوحيد للمعادلة الآتية:

$$y'' - y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

الحـل

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y'' - y = 0$$

وحلولها الأساسية هما

$$y_1 = e^{x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

وبالتالي

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

وباستخدام (5) فإن الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{2}e^{x}\int e^{-x}e^{2x}\,dx - \frac{1}{2}e^{-x}\int e^{x}e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{2x} = \frac{1}{3}e^{2x}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

لإيجاد الحل الوحيد نستخدم الشروط

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$0 = c_1(1) + c_2(1) + \frac{1}{3}(1) \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$1 = c_1(1) + c_2(1) + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad c_1 - c_2 + \frac{2}{3} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{6}$$

ويكون الحل الوحيد هو:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$