المحاضرة السابعة

معادلات تفاضلية عادية (208 ر)

المستوى الثانى (علوم الحاسب - الرياضيات - الفيزياء – الجيوفيزياء)

إيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة الغير متجانسة باستخدام المؤثر D

المؤثر D:

يعرف المؤثر D على أنه المؤثر $\frac{d}{dx}$ وعلى ذلك يكون

$$D^2=\frac{d^2}{dx^2}$$

$$D^3=\frac{d^3}{dx^3},\dots$$

$$D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

حيث n عدد صحيح موجب.

جبر المؤثر D:

1- لاحظ أن من تعريف المؤثر D يكون

$$D^0 y = 1 \,.\, y = y$$

2- $D^m(D^n y) = D^{m+n} y$

حيث m, n أعداد صحيحة.

3- إذا كانت u, v دوال تفاضلية فإن:

$$D(u \pm v) = D\,u \pm D\,v$$

4- إذا كانت α ثابتة فإن:

$$D(\alpha y) = \alpha D(y), \qquad D(\alpha) = 0$$

5- $D^n(u \pm v) = D^n(u) \pm D^n(v)$

مثال (1):

احسب قيمة

$$D^n\left(x^4+\sin 2x-5\right)$$

الحـل

$$D^2\left(x^4+\sin 2x-5\right)=D^2\left(x^4\right)+D^2\left(\sin 2x\right)-D^2(5)$$

$$=12x^2-4\sin 2x-0$$

$$=12x^2-4\sin 2x$$

والآن نعرض لبعض النظريات الأساسية المتعلقة بالمؤثر D وذلك لاستخدامها كإحدى الطرق لإيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية

نفرض أن $F(D)$ كثيرة حدود حيث:

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_n \qquad (1)$$

حيث

$a_i = a_i(x),$ $\qquad$ n صحيح موجب

لاحظ أن من تعريف $F(D)$ فإن المعادلة التفاضلية لها الصورة:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_n=g(x)$$

تأخذ الشكل الآتي:

$$F(D)\,(y) = g(x)$$

نعود الآن لنذكر بعض النظريات التي يحققها وبالتالي $F(D)$ ثم معنى $\frac{1}{F(D)}$

أولاً:

معنى $D^n e^{\alpha x}$ ثم $F(D)\left(e^{\alpha x}\right)$ ثم $\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}$

لاحظ أن:

$$\begin{aligned} De^{\alpha x} &= \alpha e^{\alpha x}, \\ D^2 e^{\alpha x} &= \alpha^2 e^{\alpha x} \\ &\vdots \\ D^n e^{\alpha x} &= \alpha^n e^{\alpha x} \end{aligned}$$

ومن تعريف $F(D)$ التي في (1) يكون:

$$\begin{aligned} F(D)e^{\alpha x} &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\alpha x} \\ &= a_0 D^n e^{\alpha x} + a_1 D^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_n e^{\alpha x} \\ &= a_0 \alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_n e^{\alpha x} \\ &= \left(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\alpha x} \\ &= F(\alpha)e^{\alpha x} \end{aligned}$$

(لاحظ أن $F(\alpha)$ = ثابت)

وعلى ذلك يكون:

$$\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{F(D)}\left\{F(\alpha)e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore F(\alpha)\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}\right\} = \frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x}}$$

حيث $F(\alpha) \neq 0$

مثال (1):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - y' - 6y = 2e^x$$

الحـل

حل المعادلة المتجانسة كما هو معلوم

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

ولإيجاد الحل الخاص باستخدام المؤثر D نقول المعادلة هي:

$$(D^2 - D - 6)\,y = 2\,e^x$$

حيث

$$F(D) = D^2 - D - 6$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{F(D)}\left(2e^x\right)$$

حيث $\alpha = 1$

$$= 2\frac{1}{F(D)}\left\{e^{x}\right\}$$

$$= 2\frac{1}{F(\alpha)}e^{x}$$

$$= 2\frac{1}{1-1-6}e^{x}$$

$$= \frac{2}{-6}e^{x}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة بالصورة الآتية:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x}.$$

مثال (2):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' + 3y = e^{-x}$$

الحـل

المعادلة لها الصورة

$$\left(D^2 + 2D + 3\right)y = e^{-x}$$

حيث

$$F(D) = D^2 + 2D + 3, \qquad \alpha = -1$$

$$F(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 2 \neq 0$$

$$\therefore\ y_p = \frac{1}{F(D)}\left\{e^{-x}\right\} = \frac{e^{-x}}{F(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}$$

مثال (3):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + y' - 2y = e^{x}$$

الحـل

لاحظ أن $\alpha = 1$ وكذلك

$$F(D) = D^2 + D - 2$$

$$F(\alpha) = F(1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

واضح أن العلاقة السابقة لا يمكن استخدامها... لماذا؟؟

لذلك سوف نذكر النظرية التالية التي تسمى بنظرية الإزاحة.

ثانياً: سوف نوجد معنى v = v(x) للآتي $D^n\left\{e^{\alpha x}v\right\}$ ثم $F(D)\left\{e^{\alpha x}v\right\}$ ثم

$$\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}v\right\}$$

لاحظ أن:

$$D\left(e^{\alpha x}v\right) = e^{\alpha x}Dv + \alpha e^{\alpha x}v$$

$$= e^{\alpha x}(D + \alpha)v$$

لاحظ أن α = ثابت... كذلك

$$D^2\left(e^{\alpha x}v\right) = D.D\left(e^{\alpha x}v\right)$$

$$= D\left\{e^{\alpha x}\underbrace{(D+\alpha)v}_{V}\right\}$$

$$= D\left\{e^{\alpha x}V\right\}$$

$$= e^{\alpha x}(D+\alpha)V$$

$$= e^{\alpha x}(D+\alpha)\left[(D+\alpha)v\right]$$

$$= e^{\alpha x}(D+\alpha)^2 v$$

$$D^n\left(e^{\alpha x}v\right) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^n v$$

وعلى ذلك

$$F(D)\left\{e^{\alpha x}v\right\} = \left(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n\right)\left\{e^{\alpha x}v\right\}$$

$$= e^{\alpha x}\Big[a_0(D+\alpha)^n + a_1(D+\alpha)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(D+\alpha) + a_n\Big]v$$

$$= e^{\alpha x}F(D+\alpha)v$$

وعلى ذلك فإن:

$$\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)e^{\alpha x}v_1\right\} = e^{\alpha x}v_1$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}F(D+\alpha)v_1\right\} = e^{\alpha x}v_1$$

نضع $F(D+\alpha)\,v_1 = v$

$$\therefore\ v_1 = \frac{1}{F(D+\alpha)}\{v\}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}v\right\} = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\{v\}}$$

ولبيان كيفية وفائدة نظرية الإزاحة نعود إلى مثال (3)

نعلم أن

$$F(D) = D^2 + D - 2$$

حيث $\alpha = 1$ ومنها $F(\alpha) = 0$ والمعادلة على الشكل

$$F(D)\{y\} = e^x$$

$$\therefore\ y_p = \frac{1}{F(D)}\left\{e^x\right\} = \frac{1}{F(D)}\left\{e^x.1\right\}$$

وباستخدام نظرية الإزاحة يكون

$$y_p = e^x\frac{1}{F(D+\alpha)}\{1\}$$

$$= e^x\frac{1}{(D+1)^2+(D+1)-2}\{1\}$$

$$= e^x\frac{1}{D(D+3)}\{1\}$$

$$= e^x\frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3}\{1\}\right]$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3}\left\{e^0\right\}\right]$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left[\frac{1}{0+3}\right]$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$= y_3 e^x \frac{1}{D}\{1\} \qquad (*)$$

في الخطوة (*) لا يمكن اعتبار $e^0 = 1$ وتطبيق المؤثر $\frac{1}{D}$ عليها لأنه في هذه الحالة سوف يكون المقام صفراً... ولإنهاء المسألة لا بد وأن نعرف المؤثر D^{-1}, D^{-2} وهكذا.

نفرض أن:

$$I\,y = \int y\,dx$$

وبإجراء تفاضل الطرفين يكون

$$\frac{d}{dx} I\,y = \frac{d}{dx}\int y\,dx$$

$$\therefore D\,I\,y = y$$

$$\therefore I = \frac{1}{D}$$

ويتضح من ذلك أن $D^{-1} = \frac{1}{D}$ تعني عملية التكامل فمثلاً

$$\frac{1}{D}\{1\} = D^{-1}\{1\} = \int dx = x$$

$$\frac{1}{D}\left\{x^3\right\} = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4$$

وعلى ذلك يكون

$$\frac{1}{D^2}\{1\} = \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}\{1\}\right\} = \frac{1}{D}\{x\} = \frac{1}{2}x^2$$

وهكذا

بالعودة الآن إلى الخطوة (*) في يكون

$$y_p = \frac{1}{3}e^x \frac{1}{D}\{1\}$$

$$= \frac{1}{3}e^x . x$$

$$= \frac{x}{3}e^x$$

وهو الحل الخاص بالمسألة.

مثال (4):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' - 2y' = 3$$

الحـل

$$F(D) = D^2 - 2D$$

$$\therefore\ y_p = \frac{1}{F(D)}\{3\} = 3\frac{1}{D(D-2)}\{1\}$$

$$=3\frac{1}{D(D-2)}\{e^0\}$$

لاحظ أن $\alpha=0$ كذلك $F(D)=0$

$$\therefore\ y_p=3\frac{1}{D}\frac{1}{D-2}\{e^0\}$$

$$\therefore\ y_p=3\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D-2}\right\}$$

$$=3\frac{1}{D}\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{D}\{1\}$$

$$=-\frac{3}{2}x$$

ثالث

نعود الآن لإيجاد معنى كل من

$$F(D^2)\cos(ax+b),\ F(D^2)\sin(ax+b)$$

حيث a, b ثوابت وبالتالي معنى

$$\frac{1}{F(D^2)}\{\cos(ax+b)\},\qquad \frac{1}{F(D^2)}\{\sin(ax+b)\}$$

نعلم أن

$$D^2\{\sin(ax+b)\}=-a^2\sin(ax+b)$$

كذلك

$$D^4\{\sin(ax+b)\}=D^2\{-a^2\sin(ax+b)\}$$
$$=(-a^2)^2\sin(ax+b)$$

وعلى العموم فإن:

$$(D^2)^n\{\sin(ax+b)\}=(-a^2)^n\sin(ax+b)$$

$$\begin{aligned}F(D^2)\{\sin(ax+b)\}&=\{a_0(D^2)^n+a_1(D^2)^{n-1}+\dots\\&\quad+a_{n-1}(D^2)+a_n\}\sin(ax+b)\\&=\{a_0(-a^2)^n+a_1(-a^2)^{n-1}+\dots\\&\quad+a_{n-1}(-a^2)+a_n\}\sin(ax+b)\\&=F(-a^2)\sin(ax+b)\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\boxed{F(D^2)\{\cos(ax+b)\}=F(-a^2)\cos(ax+b)}$$

وعليه فإن:

$$\frac{1}{F(D^2)}\{F(D^2)\sin(ax+b)\}=\sin(ax+b)$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D^2)}\{F(-a^2)\sin(ax+b)\}=\sin(ax+b)$$

$$\boxed{\frac{1}{F(D^2)}\{\sin(ax+b)\}=\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)}$$

حيث $F(-a^2)\neq 0$

وكذلك يكون

$$\boxed{\frac{1}{F(D^2)}\{\cos(ax+b)\}=\frac{1}{F(-a^2)}\cos(ax+b)}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن (حيث $F(a^2)\neq 0$)

$$\boxed{\frac{1}{F(D^2)}\{\sinh(ax+b)\}=\frac{1}{F(a^2)}\sinh(ax+b)}$$

$$\boxed{\frac{1}{F(D^2)}\{\cosh(ax+b)\}=\frac{1}{F(a^2)}\cosh(ax+b)}$$

وكأمثلة على القوانين السابقة فإن:

مثال (5):

احسب قيمة كل من

$$(D^2+4)\{\sin 3x\}=(-9+4)\sin 3x=-5\sin 2x\,,$$

$$(D^4+3D^2+7)\{\cos x\}=\left[(-1)^2+3(-1)+7\right]\cos x=-\cos x\,,$$

$$\frac{1}{D^2+4}\{\sin 4x\}=\frac{1}{-16+4}\{\sin 4x\}=\frac{-1}{12}\sin 4x\,,$$

$$\frac{1}{D-2}\{\cos 2x\}=\frac{D+2}{D^2-4}\{\cos 2x\}=(D+2)\frac{1}{D^2-4}\{\cos 2x\}$$

$$=(D+2)\left[\frac{1}{-4-4}\right]\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{8}(D+2)\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{8}\{D\cos 2x+2\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{8}\{-2\sin 2x+2\cos 2x\}$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 2x-\cos 2x)$$

مثال (6):

احسب قيمة

$$\frac{1}{D^2+D+2}\{\cos 2x\}$$

الحـل

$$\frac{1}{D^2+D+2}\{\cos 2x\}=\frac{1}{(-4)+D+2}\{\cos 2x\}$$

$$=\frac{1}{D-2}\{\cos 2x\}$$

$$=\frac{D+2}{D^2-4}\{\cos 2x\}$$

$$=(D+2)\frac{1}{D^2-4}\{\cos 2x\}$$

$$=(D+2)\left\{\frac{1}{-4-4}\cos 2x\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}(D+2)\cos 2x$$

$$= -\frac{1}{8}[-2\sin 2x + 2\cos 2x]$$

$$= \frac{1}{4}[\sin 2x - \cos 2x].$$

مثال (7):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' + y = e^{3x} + 4e^{x}$$

الحـل

$$F(D) = D^2 + 2D + 1 = (D+1)^2$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{1}{F(D)}\{e^{3x}\} + \frac{1}{F(D)}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{(D+1)^2}\{e^{3x}\} + \frac{1}{(D+1)^2}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{16}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{x}$$

مثال (8):

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + y = e^{x}$$

الحـل

$$F(D) = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{1}{F(D)}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2}\{e^{x}.1\}$$

$$= e^{x}\frac{1}{(D+1-1)^2}\{1\}$$

$$= e^{x}\frac{1}{D^2}\{1\}$$

$$= e^{x}\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}(1)\right\}$$

$$= e^{x}\frac{1}{D}\{x\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x}$$

والآن سوف نعطي بعض المفكوكات التي تفيد في حل بعض المسائل.

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \dots$$

$$\frac{1}{(1+D)^2}=1-2D+3D^2-4D^3+\dots$$

$$\frac{1}{(1-D)^2}=1+2D+3D^2+4D^3+\dots$$

وعلى وجه العموم فإن:

$$\frac{1}{(1+D)^m}=1-mD+\frac{m(m+1)}{2!}D^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}D^3+\dots$$

وتلك المفكوكات مفيدة إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية كثيرة حدود.

مثال (9):

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y''-y'-2y=3x^2-2x+1$$

الحـل

$$F(D)=(D^2-D-2)=(D-2)(D+1)$$

$$y_p=\frac{1}{F(D)}\{3x^2-2x+1\}$$

$$=\frac{1}{(D-2)(D+1)}\{3x^3-2x+1\}$$

$$=\left[\frac{1/3}{D-2}-\frac{1/3}{D+1}\right]\{3x^3-2x+1\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-D/2)}-\frac{1}{(1+D)}\right]\{3x^2-2x+1\}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\frac{D^3}{8}+\dots\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-D+D^2-D^3+\dots\right)\right]\{3x^2-2x+1\}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{4}D+\frac{9}{8}D^2-\frac{15}{16}D^3+\dots\right]\{3x^3-2x+1\}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}(3x^2-2x+1)-\frac{3}{4}(3x^2-2x+1)'\right.$$

$$\left.+\frac{9}{8}(3x^2-2x+1)''+\frac{15}{16}(zero)\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{9}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{27}{4}\right]$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{13}{4}$$

مثال (10):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y''+y'+y=\cosh x+\sin 2x$$

الحـل

$$F(D)=D^2+D+1$$

الحل الخاص بالنسبة إلى $\cosh x$ هو y_{p_1} حيث

$$y_{p_1}=\frac{1}{F(D)}\{\cosh x\}=\frac{1}{D^2+D+1}\{\cosh x\}$$

$$=\frac{1}{1^2+D+1}\{\cosh x\}=\frac{1}{D+2}\{\cosh x\}$$

$$=\frac{D-2}{D^2-4}\{\cosh x\}=(D-2)\left\{\frac{1}{D^2-4}\cosh x\right\}$$

$$=(D-2)\left\{\frac{1}{1-4}\cosh x\right\}=-\frac{1}{3}(D-2)\cosh x$$

$$=-\frac{1}{3}[\sinh x-2\cosh x].$$

والحل الخاص بالنسبة إلى $\sin 2x$ هو y_{p_2} حيث

$$y_{p_2}=\frac{1}{F(D)}\{\sin 2x\}=\frac{1}{D^2+D+1}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{1}{-4+D+1}\{\sin 2x\}=\frac{1}{D-3}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{D+3}{D^2-9}\{\sin 2x\}=(D+3)\left\{\frac{1}{D^2-9}\sin 2x\right\}$$

$$=(D+3)\left\{\frac{1}{-4-9}\sin 2x\right\}=-\frac{1}{13}(D+3)\{\sin 2x\}$$

$$=-\frac{1}{13}[2\cos 2x+3\sin 2x]$$

ويكون الحل الخاص هو y_p حيث: $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$