المحاضرة الثامنة

معادلات تفاضلية عادية (208 ر)

المستوى الثاني (علوم الحاسب - الرياضيات - الفيزياء – الجيوفيزياء)

مجموعة المعادلات التفاضلية الآنية

سوف ندرس مجموعة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة، وهي معادلات على الصورة:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 x + f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث a_1, b_1, a_2, b_2 ثوابت. يلاحظ أن المتغير المستقل هو t وهناك متغيران تابعان هما x, y فإذا وضعنا المؤثر

$$\frac{d}{dt} = D$$

أي أن

$$\frac{dy}{dt} = Dy, \qquad \frac{dx}{dt} = Dx$$

فإن المجموعة (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$\left.\begin{aligned} (D - a_1)x - \quad b_1 y &= f_1(t) \\ -a_2 x + (D - b_2)y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

وسوف ننظر للمجموعة (2) على أنهما معادلتان في مجهولين x, y بحلهما يمكن الحصول

على x, y ويساوي أي منهم المؤثر D أو D^2 حيث $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ والأمثلة سوف توضح الفكرة.

مثال (1):

أوجد حل المجموعة (الحل العام)

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0,$$

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$$

الحـل

يمكن كتابة المعادلتان باستخدام المؤثر D كالآتي:

$$(D + 3)\, x + y = 0$$

$$(2D - 4)\, x + (D - 1)\, y = e^t$$

ولحذف أحد المتغيران التابعان نضرب الأولى في$(D - 1)$– ثم نجمع على الثانية فنحصل على

$$-(D - 1)(D + 3)\, x + (2D - 4)\, x = e^t$$

ومنها

$$-(D^2 + 2D - 3)\, x + (2D - 4)\, x = e^t$$

$$-\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 3x + 2\frac{dx}{dt} - 4x = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=-e^t \qquad (*)$$

وهي معادلة غير متجانسة من الرتبة الثانية كما رأينا يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$x_h = c_1\sin t + c_2\cos t$$

والحل الخاص هو

$$x_p = -\frac{1}{2}e^t$$

وعلى ذلك فإن الحل المعادلة (*) هو

$$x = x_p + x_h = c_1\sin t + c_2\cos t - \frac{1}{2}e^t$$

ولإيجاد المتغير الثاني y نلاحظ أن الأسهل هو استخدام المعادلة الأولى من المجموعة المعطاة فإن:

$$y = -\frac{dx}{dt} - 3x$$

$$\therefore\ y = -\frac{d}{dt}\left(c_1\sin t + c_2\cos t - \frac{1}{2}t\right) - 3\left(c_1\sin t + c_2\cos t - \frac{1}{2}t\right)$$

$$= (c_2 - 3c_1)\sin t - (3c_2 + c_1)\cos t + 2e^t$$

ويجب الاحتفاظ بالثوابت $(c_1 - 3c_2)$, $-(3c_1 + c_2)$ كما هي حيث أن المجموعة مكونة من معادلتين كل منهم من الرتبة الأولى لذلك فإن المجموعة تكافئ معادلة واحدة من الرتبة الثانية لذلك فإن حلها العام يجب أن يحتوي على ثابتين اختياريان فقط.

مثال (2):

أوجد حل المجموعة

$$\dot{x} + \dot{y} = x + 2t + 1,$$
$$2\dot{x} + 2\dot{y} = -x + t$$

الحـل

يمكن إعادة كتابة المعادلتان باستخدام المؤثر D كالآتي:

$$(D-1)\,x + D\,y = 2t + 1$$
$$(2D+1)\,x + 2\,D\,y = t$$

بضرب الأولى في 2- والجمع على الثانية يكون وذلك لحذف y

$$(2D+1)\,x - 2(D-1)\,x = t - 2(2t+1)$$
$$2D\,x + x - 2D\,x + 2x = -3t - 2$$
$$3x = -3t - 2$$
$$x = -t - \frac{2}{3}$$

وباستخدام أي من المعادلتان المعطاة ولتكن الأولى فإن:

$$\frac{dy}{dt} = 2t + 1 - \frac{dx}{dt} + x$$
$$= 2t + 1 - \frac{d}{dt}\left(-t - \frac{2}{3}\right) + \left(-t - \frac{2}{3}\right)$$
$$= t + \frac{4}{3}$$

ومنها

$$y=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c_1$$

والحل العام للمجموعة هو

$$x=-t-\frac{2}{3},\qquad y=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c_1$$

يلاحظ أن المجموعة في واقع الأمر هي معادلة واحدة من الرتبة الأولى لذلك فإن الحل العام يحتوي على ثابت واحد فقط.

مثال (3):

أوجد الحل العام للمجموعة

$$\dot{x}=-2x-3y,\qquad \dot{y}=2e^{2t}-3x-2y$$

الحـل

باستخدام المؤثر D فإن:

$$(D+2)\,x+3\,y=0$$

$$3x+(D+2)y=2e^{2t}$$

لحذف أحد المتغيرين التابعين نضرب الثانية في 3- والأولى في $(D+2)$ (والضرب يجب أن يكون من جهة اليسار) ثم الجمع نحصل على

$$(D+2)^2\,x-9x=-6e^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}-5x=-6e^{2t}$$

$$x_h=c_1e^t+c_2e^{-5t}$$

$$x_p=-\frac{6}{7}e^{2t}$$

وعلى ذلك فإن

$$x=c_1e^t+c_2e^{-5t}-\frac{6}{7}e^{2t}.$$

ولإيجاد y نستخدم المعادلة الأولى فنحصل على

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{3}\frac{dx}{dt}-\frac{2}{3}x\\&=-\frac{1}{3}\left(c_1e^t-5c_2e^{-5t}-\frac{12}{7}e^{2t}\right)-\frac{2}{3}\left(c_1e^t+c_2e^{-5t}-\frac{6}{7}e^{2t}\right)\\&=-c_1e^t+c_2e^{-5t}+\frac{8}{7}e^{2t}\end{aligned}$$

مثال (4):

أوجد الحل الوحيد للمجموعة

$$\begin{aligned}\dot{x}+2\dot{y}&=3x-4y+2\sin t &&,x(0)=0\\2\dot{x}+\dot{y}&=-2x+y=\cos t &&,y(0)=0\end{aligned}$$

الحـل

المجموعة تكافئ

$$(D-3)\,x+2(D+2)\,y=2\sin t$$

$$2(D+1)\,x+(D-1)\,y=\cos t$$

بضرب الأولى في $(D-1)-$ والثانية في $2(D+2)$ من جهة اليسار ثم الجمع نحصل على

$$4(D+2)(D+1)\,x-(D-1)(D-3)\,x=2(D+2)\cos t-2(D-1)\sin t$$

$$\therefore 4(D^2+3D+2)\,x-(D^2-4D+3)\,x=2D(\cos t)+4\cos t-2D(\sin t)$$
$$+\,2\sin t$$

$$(3D^2+16D+5)\,x=-2\cos t+2\sin t-2\sin t+4\cos t$$

$$\therefore\ \frac{d^2x}{dt^2}+16\frac{dx}{dt}+5x=2\cos t$$

$$\therefore\ x_h=c_1e^{-5t}+c_2^{-\frac{t}{3}}$$

$$x_p=\frac{1}{65}(8\sin t+\cos t)$$

$$\therefore\ x=c_1e^{-5t}+c_2e^{\frac{-t}{3}}+\frac{1}{65}(8\sin t+\cos t) \qquad (2)$$

ولإيجاد y نستخدم المعادلة الثانية مثلاً فإن:

$$\frac{dy}{dt}-y=\cos t-2\frac{dx}{dt}-2x$$
$$=8c_1e^{-5t}-\frac{4}{3}c_2e^{\frac{-t}{3}}+\frac{1}{65}(47\cos t-14\sin t)$$

وهي معادلة خطية في y على شكل

$$y'+p(t)\,y=g(t)$$

فيها

$$\mu(t)=e^{-\int dt}=e^{-t}$$

$$y(t)=\frac{1}{\mu}\left\{c_3+\int \mu\, g\,dt\right\}$$
$$=e^t\left\{c_3-\frac{4}{3}c_1e^{-6t}+c_2e^{\frac{-4}{3}t}+\frac{1}{130}(61\sin t-33\cos t)e^{-t}\right\}$$

$$\therefore\ y=-\frac{4}{3}c_1e^{-5t}+c_2e^{\frac{-t}{3}}+\frac{1}{130}(61\sin t-33\cos t)+c_3e^t \qquad (3)$$

وحيث أن المجموعة تكافئ معادلة من الرتبة الثانية فإن حلها العام يجب أن يحتوي على ثابتين فقط لذلك إذا عوضنا عن x, y من (3) ,(2) في المعادلة (1) نحصل على $c_3 = 0$ لذلك فإن الحل العام للمجموعة هو

$$x=c_1e^{-5t}+c_2e^{\frac{-t}{3}}+\frac{1}{65}(8\sin t+\cos t)$$

$$y=-\frac{4}{3}c_1e^{-5t}+c_2e^{\frac{-t}{3}}+\frac{1}{130}(61\sin t-33\cos t)$$

لإيجاد الحل الوحيد الذي يحقق الشرطان $x(0) = y(0) = 0$

$$0=c_1+c_2+\frac{1}{65}$$

$$0=-\frac{4}{3}c_1+c_2-\frac{33}{130}$$

وهما معادلتان في مجهولين c_1, c_2 بحلهما يكون

$$c_1=-\frac{3}{26},\qquad c_2=\frac{13}{130}$$

وعلى ذلك فإن الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الابتدائية هو

$$x = -\frac{3}{26}e^{-5t} + \frac{13}{130}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t)$$

$$y = \frac{2}{13}e^{-5t} + \frac{13}{130}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t).$$

تمارين محلولة

1- أوجد الحل العام للمعادلة

$$x'' - 3x' + 2x = 2t^2 + 1.$$

الحل

نفرض أن $y = e^{rx}$

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$$

$$x_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

$$f(t) = 2t^2 + 1$$

$$x_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2.$$

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)'' - 3(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)' + 2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) = 2t^2 + 1$$

or

$$2A_2 - 3A_1 - 6A_2 t + 2A_0 + 2A_1 t + 2A_2 t^2 = 2t^2 + 1.$$

$$\begin{aligned} 1:&\quad 2A_2 - 3A_1 + 2A_0 = 1,\\ t:&\quad -6A_2 + 2A_1 = 0,\\ t^2:&\quad 2A_2 = 2, \end{aligned}$$

$$A_0 = 4, \quad A_1 = 3, \quad A_2 = 1.$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو:

$$x = x_p + x_h = 4 + 3t + t^2 + c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

2- أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$x'' + x = e^{-t}.$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 1 = 0,$$

$$r = i \text{ and } r = -i.$$

$$f(t) = e^{-t}$$

$$x_p = Ae^{-t}.$$

$$(Ae^{-t})'' + Ae^{-t} = 3e^{-t}.$$

وعلى ذلك فإن الحل الخاص هو:

$$x_p = \tfrac{3}{2}e^{-t}$$

3- أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$x'' - x = 3e^{-t}.$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 - 1 = 0,$$

$$r = 1, -1.$$

$$x_p = Ate^{-t}.$$

$$(Ate^{-t})'' - Ate^{-t} = 3e^{-t}.$$

$$A(e^{-t} - te^{-t})' - Ate^{-t} = 3e^{-t},$$

$$A(-2e^{-t} + te^{-t}) - Ate^{-t} = 3e^{-t}.$$

$$-2A = 3,$$

وعلى ذلك فإن الحل الخاص هو:

$$x_p = -\tfrac{3}{2}te^{-t}$$

4- أوجد شكل الحل الخاص للمعادلة:

$$x'' - x' = t^3 + t + e^{2t} - 2te^{2t}$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 - r = r(r-1) = 0,$$

$$r = 0,\ 1,$$

$$x_h = c_1 + c_2 e^t.$$

$$f = \underbrace{(t^3 + t)} + \underbrace{(1 - 2t)e^{2t}}.$$

$$x_p = t(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3) + (A_4 + A_5 t)e^{2t}.$$

5- أوجد شكل الحل الخاص للمعادلة:

$$x'' + 2x' + 2x = 3e^{-t} + 4\cos t.$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

$$r = -1 + i\ ,\ r = -1 - i.$$

$$x_h = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t.$$

$$x_p = A_1 e^{-t} + A_2 \cos t + B_2 \sin t$$

6- أوجد شكل الحل الخاص للمعادلة:

$$x'' + 4x = \sin 2t$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4 = 0,$$

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

$$x_p = t[A \cos 2t + B \sin 2t].$$

7- أوجد شكل الحل الخاص للمعادلة:

$$x'' + 4x = t^2 \cos 2t - t \sin 2t + \sin 2t = t^2 \cos 2t + (1-t)\sin 2t$$

الحل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4 = 0$$

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

$$x_p = t[(A_1 + A_1 t + A_2 t^2)\cos 2t + (B_0 + B_1 t + B_2 t^2)\sin 2t].$$