١- الاساس والوزن للفراغ التوبولوجي ومعامل التكثيف للفراغ التوبولوجي والعلاقة بين معامل التكثيف والوزن.

سبق تعريف الأساس. اعط تعريف الأساس للفراغ التوبولوجي.

اكتب اساس مرقم لكل من: (R,τ_ℓ) و (R,τ_u).

هل يوجد اساس مرقم لـ (X,e^X) دائما؟ متى يكون لـ (X,e^X) اساس مرقم.

تعريف: في الفراغ التوبولوجي X الفئة $A\subset X$ تسمى كثيفة اذا كان $[A]=X$

i.e. A-dense in X iff $\forall x\in X$, $\forall U$-open, $x\in U$, $U\cap A\neq\varphi$.

مثال: في (R,τ_u) الفئات Q ، Q^c كثيفة وكل من $(0,1)$, Z ، $(-\infty,a]$ ليست كثيفة اشرح لماذا؟

تم تعريف وزن الفراغ التوبولوجي X على أنه قوة اصغر اساس لـ X او

$$\text{Weight}(X)=w(X)=\inf\{|\beta| : \beta\text{-basis for } X\}$$

في حالة

$$w(X)\leq\aleph_0$$

يسمى X فراغ ثنائي الترقيم.

وكذلك عرف معامل تكثيف الفراغ التوبولوجي X والذي يرمز له بالرمز $d(X)$ بالشكل

$$d(X)=\inf\{|A| : [A]=X\}$$

توبولوجي
توبولوجي

٤ - ع . احصاء - حاسب
٤ . ١٢ . م

نظرية: إذا كان (X, τ) فراغ توبولوجي
وكان $\beta = \{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$
أساس لـ X فإن الفئة
$$A = \{a_\alpha : \alpha \in \Delta, a_\alpha \in U_\alpha\}$$
فئة كثيفة في X.

البرهان: بأخذ $x \in X$ نقطة اختيارية
وأن G فئة مفتوحة تحتوي x
من تعريف الأساس فإنه يوجد $U_\alpha \in \beta$
حيث $x \in U_\alpha \subset G$
وحيث $U_\alpha \cap A \supset \{a_\alpha\} \neq \varphi$
فإن
$$G \cap A = \varphi$$
إذن A فئة كثيفة في X. و $|A| \leq |\beta|$
لذلك
$$\inf\{|A| : [A] = X\} \leq \inf\{|\beta| : \beta\text{-basis for } X\}$$

i.e. $d(X) \leq w(X)$

وهذا يعني إذا كان X ثنائي العد
أي يكون أساس عدي فإن X يكون
فئة كثيفة عدية
ومثال على فراغ ليس ثنائي العد ولكنه
فراغ separable (يكون فئة كثيفة عدية)
هو (X, τ_∞) لأن X حيث $|X| > \aleph_0$
(انظر الكتاب).

لاحظ ان كون β اساس لتوبولوجي τ على مجموعة X
يعني ان عناصر τ ما هي الا اتحادات لعناصر β
بالاضافة ل φ.

٢- لو $X \neq \varphi$ ، $\beta \subset P(X)$ فإن β ليس بالضرورة
ان تكون اساس لتوبولوجي ما على X.

مثال: اعتبر $X = R$ و

$$\beta = \{(-\infty, b) : b \in R\} \cup \{(a, \infty) : a \in R\}$$

فإن β لا تصلح ان تكون اساس لتوبولوجي
على R لانه اذا كانت β اساس
لتوبولوجي ما τ على X فإن عناصر β من
عناصر τ وتكون

$$(-\infty, b) \cap (a, \infty) \qquad (a < b)$$
$$= (a, b) \notin \tau$$

وكلاهما $(-\infty, b), (a, \infty)$ عنصر من τ

النظرية التالية تعطي الشروط الكافية لكي تكون
$\beta \subseteq P(X)$ اساس لتوبولوجي على X.

نظرية: اذا كانت $X \neq \varphi$ و $\beta \subseteq P(X)$
وكانت β تحقق الشرطين

(1) $\cup \beta = X$

2) $\forall U, V \in \beta, \ \forall x \in U \cap V \ \exists W \in \beta :$
$x \in W \subset U \cap V$

فإن عائلة الاتحادات الممكنة لعناصر β
بالاضافة ل φ تكون توبولوجي
على X. التوبولوجي الناتج
يسمى بالتوبولوجي المولد بـ β ويأخذ
الرمز $\tau(\beta)$.

$\tau(\beta)$ هو اصغر توبولوجي يحوي β
وهو توبولوجي وحيد على X له β أساس.

مثال:

نفرض $X = \{a, b, c, d\}$

اشرح ان كان ما يلي يمثل اساس لتوبولوجي على X وفي حالة كونه اساس اكتب عناصر التوبولوجي الناتج

1) $\beta = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, d\}\}$

2) $\beta = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$

3) $\beta = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$

4) $\beta = \{X\}$

5) $\beta = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

6) $\beta = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{b\}\}$.

لكي تكون $\beta \subseteq P(X)$ اساس لتوبولوجي يلزم ان يتحقق الشرطين من النظرية السابقة ولن تكون اساس لاي توبولوجي إذا لم يتحقق احد الشرطين او كلاهما

الحل:

(1) $\cup \beta = X$

لاي $u, v \in \beta$ نجد ان $\phi = u \cap v$ او

$u \cap v = \{a\}$

في حالة $u = \{a\}, v = \{a, d\}$

وفي هذه الحالة

$a \in u \cap v, \exists w = \{a\} : a \in \{a\} \subset u \cap v$.

نتحقق الشرطين لذا β في (1) اساس لتوبولوجي. التوبولوجي الناتج هو

$\tau(\beta) = \{X, \phi, \{a, b, c\}, \{a\}, \{b, c\}, \{a, d\}\}$

أي توبولوجي على X يحوي β سيحوي $\tau(\beta)$

وان " " " له β اساس سيكون هو نفسه $\tau(\beta)$.

تحقيق الشرطين الكافيين لكي تكون β اساس في المثال بالمثل

تمرينات :- الكتاب.

ص ٧٣ ، ٧٤

ص ٧٩ .