1- خواص أخرى للفضاءات المحكمة:

1- نظرية: نفرض ان $f: X \longrightarrow Y$ دالة متصلة من فضاء توبولوجي X إلى فضاء توبولوجي Y وان A مجموعة جزئية محكمة من X. فان $f(A)$ محكمة من Y.

البرهان:

نفرض $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ غطاء مفتوح لـ $f(A)$ من Y. حيث ان f دالة متصلة فان $\{f^{-1}V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ تكون غطاء مفتوح لـ A. باستخدام ان A مجموعة محكمة يوجد غطاء جزئي منتهي $\{f^{-1}V_{\alpha_i} : i=1,2,\dots,k\}$ من الغطاء $\{f^{-1}V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ للمجموعة A.

لذلك العائلة $\{V_{\alpha_i} : i \in \{1,2,\dots,k\}\}$ تكون غطاء جزئي منتهي من الغطاء $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ للمجموعة $f(A)$. وهذا يثبت ان $f(A)$ مجموعة محكمة.

نتيجة: نفرض ان $f: X \longrightarrow Y$ دالة متصلة وان X فضاء محكم و Y فضاء هاوسدورف فان f دالة مغلقة

الاثبات: نفرض ان A مجموعة مغلقة من X وحيث ان X محكم فان A مجموعة محكمة وباستخدام النظرية السابقة فان $f(A)$ محكمة أيضا. وبما ان المجموعة المحكمة في Y وهو فضاء هاوسدورف تكون مغلقة، وهذا يكمل المطلوب

نظرية: نفرض $f : X \longrightarrow Y$ راسم متصل ومغلق من فضاء محلي هوسدورف X على فضاء اختياري Y. فإن Y فضاء هوسدورف.

البرهان: نفرض $f(x), f(y)$ نقطتين مختلفتين في Y فئات مغلقة في X لأنه فضاء T_2 وحيث أن f راسم مغلق فإن $\{f(x)\}, \{f(y)\}$ فئات مغلقة في Y. الفئات $f^{-1}\{f(x)\}, f^{-1}\{f(y)\}$ فئات مغلقة في X (لأن f متصل)، وهي فئات غير متقاطعة. حيث أن X فضاء T_2 ومحلي فهو T_4 (نظرية سابقة)

لذلك يوجد جوارات U, V غير متقاطعة في X للفئتين $f^{-1}\{f(x)\}, f^{-1}\{f(y)\}$ على الترتيب
باستخدام أن $X = V \cup (X \setminus V)$ ينتج أن

$$f(X) = Y = f(V) \cup f(X \setminus V)$$

وحيث أن f راسم مغلق فإن $f(X \setminus V)$ فئة مغلقة في Y لذلك $Y \setminus f(X \setminus V)$ مفتوحة وتحتوي $f(y)$ و $Y \setminus f(X \setminus V) \subset f(V)$

بالمثل: $X = X \setminus (X \setminus U) \Longleftarrow Y \setminus f(X \setminus U)$ فئة مفتوحة وتحتوي $f(x)$.

باستخدام قوانين دي مورجان نجد أن

$$(Y \setminus (f(X \setminus U))) \cap (Y \setminus (f(X \setminus V))) = Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V))$$

وحيث أن $U \cap V = \phi$ و $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ ومن ذلك

$$f(X) = Y = f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V).$$

ومنها يؤدي إلى

$$Y \setminus (f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V)) = Y \setminus Y = \phi.$$

وهذا يعطي أن Y فضاء هوسدورف

لإثبات أن الإحكام خاصية ضربية أي أن فضاء الضرب لفضاءات محكمة هو فضاء محكم نستعين بالنظرية التالية

نظرية:
نفرض β أساس لفضاء توبولوجي ما X.
فإن X محكم $\Longleftrightarrow$ كل غطاء
$\eta = \{B_\alpha \in \beta : \alpha \in \Delta\}$
لـ X له غطاء جزئي منتهٍ لـ X.
أي لبيان أن فضاء محكم علينا استخدام غطاء من فئات مفتوحة من أساس لهذا الفضاء.

<u>نظرية</u>: فضاء الضرب $X\times Y$ محكم إذا وفقط إذا كان كل من X, Y محكم.

البرهان: نفرض $X\times Y$ محكم. الراسم الإسقاطي $p_X : X\times Y \to X$ راسم متصل والإحكام صفة لا متغيرة بالنسبة لعائلة الرواسم المتصلة لذلك X محكم وبالمثل Y محكم.
الآن نفرض أن X, Y فضاءات محكمة. لبيان أن $X\times Y$ محكم تكفي إثبات أن أي غطاء لـ $X\times Y$ من فئات مفتوحة أساسية في $X\times Y$ له غطاء جزئي منتهٍ. بالرجوع لأشكال الفئات المفتوحة من أساس لـ $X\times Y$ نجدها بالشكل $U\times V$ حيث U - مفتوحة في X و V - مفتوحة في Y.
الآن نفرض أن
$$\eta = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$$
غطاء مفتوح حيث U_α مفتوحة في X و V_α مفتوحة في Y

بإثبات $x\in X$ العنصر $\{x\}\times Y$ هوميومورفك لـ Y
وحيث أن Y مكتنز فإن $\{x\}\times Y$ مكتنز.
العائلة $\mathcal{U}=\{U_\alpha\times V_\alpha : \alpha\in\Delta\}$ تكون غطاءً مفتوح
لـ $\{x\}\times Y$ إذن يوجد غطاء جزئي منتهي
$\mathcal{U}_x=\{U_{\alpha_k}\times V_{\alpha_k} : k\in\Delta_x\subset\Delta\}$ من $\mathcal{U}$

حيث Δ_x فئة أدلة منتهية $x\in U_{\alpha_k}$ وذلك
لكل $k\in\Delta_x$.

الفئة $U(x)=\bigcap_{k\in\Delta_x}U_{\alpha_k}$ فئة مفتوحة
تحتوي x لذلك العائلة
$\{U(x)\times V_{\alpha_k} : k\in\Delta_x\}$
هي تكون غطاء منتهي مفتوح للفئة $\{x\}\times Y$ ،

باستمرار بهذا الشكل لكل $x\in X$ تكون $\{U(x): x\in X\}$
والتي هي (عائلة الفئات $U(x)$ ، $x\in X$) تكون غطاء
مفتوح لـ X . باستخدام أن X فضاء مكتنز
يوجد غطاء جزئي منتهي من هذا الغطاء
ولتكن هو العائلة $\{U(x_i) : i=1,2,\dots,p\}$
حيث أن كل $U(x_i)$ هي تقاطع لعدد منتهي من
U_α الداخلة في تكوين الغطاء $\{U_\alpha\times V_\alpha : \alpha\in\Delta\}$

باختيار $U_{\alpha_{x_j}}$ واحدة من العناصر الداخلة في

التقاطع المكون للعنصر $U(x_j)$ حيث $U(x_j)\subset U_{\alpha_{x_j}}$

حيث $j=1,2,\dots,p$. لذلك العائلة
$\{U_{\alpha_{x_j}} : j=1,2,\dots,p\}$ غطاء منتهي مفتوح لـ X .

ولكل $j=1,2,\dots,p$ ، العائلة

العائلة $\{U_{\alpha_{x_j}} \times V_{\alpha_k} : k \in \Delta_{x_j}\}$ غطاء

للشريط الرأسي $U(x_j) \times Y$ وذلك لكل $1 \le j \le p$

وهذا يعني ان العائلة

$$\{U_{\alpha_{x_j}} \times V_{\alpha_k} : k \in \Delta_{x_j} , j \in \{1,2,\dots,p\}\}$$

تكون غطاء جزئياً منتهياً من الغطاء

$\{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$. وبذلك $X \times Y$ محكم.

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي يمكن اثبات:

تعميم: فضاء الضرب الطبيعي $\prod_{i=1}^{n} X_i$ يكون محكم اذا وفقط اذا كان كل فضاء X_k لكل $k=1,2,\dots,n$ فضاء محكم.

تمرينات:

١- عرف خاصية التقاطعات المنتهية لعائلة من المجموعات وأثبت ان الفضاء (X, τ) فضاء محكم $\Leftrightarrow$ أي عائلة من الفئات المغلقة المحققة لخاصية التقاطعات المنتهية لها تقاطع غير خالي.

٢- اشرح أي من الفضاءات الآتية محكم وأيها غير محكم:

$(\mathbb{R}, \tau_c)$, $(\mathbb{R}, \tau_\infty)$, $(\mathbb{R}, \tau_u)$

٣- في $(\mathbb{R}, \tau_u)$ هل من الفئات التالية غير محكمة ووضح ذلك

$[0,1)$, $(-\infty, 0]$, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

٤ - اذا كان (X,τ) فضاء محكم وكان $\tau_1 \subset \tau$ اثبت ان (X,τ_1) محكم ايضا .

٥ - نفرض A فئة محكمة من فضاء منتظم ، اذا كانت U فئة مفتوحة تحتوي A اثبت انه يوجد فئة مفتوحة V من X بحيث

$A \subset V \subset [V] \subset U.$

٦ - اثبت ان أي فضاء محكم ومنتظم هو اعتيادي