تعويض فايرستراش:

الدوال الكسرية فى الدوال $\sin\ x$ و $\cos x$ ممكن اجراء تكاملها باستخدام تعويض فايرستراش

نفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

مثال:

Find $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}dz$$

$$= \int \frac{dz}{z(1+z)} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}\right)dz = \ln|z| - \ln|1+z| + C = \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}\right| + C$$

Find $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{3-2\frac{1-z^2}{1+z^2}}dz = \int \frac{2\,dz}{1+5z^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}(z\sqrt{5}) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\tan^{-1}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

Find $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{2+\frac{1-z^2}{1+z^2}}dz = \int \frac{2\,dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C$$

Find $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

بفرض أن $z = tan^{-1}\frac{x}{2}$ و أن $sinx = \frac{2z}{1+z^2}$ و $cosx = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ و $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{5+4\frac{2z}{1+z^2}}dz = \int \frac{2\,dz}{5+8z+5z^2}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{z+(\frac{4}{5})}{\frac{3}{5}}\right)+C = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan(x/2)+4}{3}\right)+C$$

SUPPLEMENTARY PROBLEMS

In Problems 14–39, evaluate the given integral.

14. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

16. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C$

17. $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}dx = -x + \frac{4}{3}[\sqrt{3x+2} - \ln(1+\sqrt{3x+2})] + C$

23. $\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}} + C$

24. $\int \frac{dx}{1-2\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\tan\frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}}\right| + C$

25. $\int \frac{dx}{3+5\sin x} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\tan\frac{1}{2}x + 1}{\tan\frac{1}{2}x + 3}\right| + C$

26. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1} = \ln\left|\tan\frac{1}{2}x - 1\right| + C$

27. $\int \frac{dx}{5+3\sin x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{5\tan(x/2)+3}{4} + C$

28. $\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan^2\frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}}\right| + C$

5.10 التكاملات المعتلة

لنفرض أن f دالة متصلة على الفترة $[a,-\infty)$.

نستطيع إيجاد التكامل $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن b عدد أكبر من a، عندما يؤول b إلى ∞ وتكون النهاية

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1$$

موجودة، وعندها نسمي $\int_a^\infty f(x)dx$ التكامل المعتل، ونقول إن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب. إذا كانت النهاية في (1) غير موجودة، يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً. التكامل المعتل على الشكل $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ يعني:

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^b f(x)dx \qquad (2$$

ويكون متقارباً إذا كانت النهاية (2) موجودة، ومتباعداً إذا كانت النهاية (2) غير موجودة

مثال 18

احسب $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

الحل

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}[-e^{-x}]\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}\right) + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e}$$

$$= 0+\frac{1}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

مثــال 19

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

الحــل

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln |x|] \Big|_1^b$$

إذن يكون $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ متباعداً.

مثــال 20

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ حيث $n \neq 1$.

الحــل

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^n} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right)\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{-n+1}}{1-n} - \frac{1}{1-n}\right) \\ &= \tfrac{1}{1-n} \lim_{b\to\infty} (b^{-n+1} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & , \quad n > 1 \\ \infty & , \quad n \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

من المثالين السابقين، نستطيع استنتاج أن:

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ يكون متقارباً إذا كان $n > 1$، ويكون متباعداً إذا كان $n \leq 1$.

قد يكون من الصعب تحديد تقارب أو تباعد التكامل المعتل بالطرق العادية، ولكن هناك اختباراً لمعرفة تقارب أو تباعد تكامل بعض الدوال، وذلك بمقارنة تكاملها مع تكامل بعض الدوال المعروف تكاملها المعتل.

اختبار المقارنة للتكامل المعتل.

إذا كانت f و g دالتين متصلتين على الفترة $[a,\infty)$، و $0 \le f(x) \le g(x)$ لكل $x \in [a,\infty)$، فإذا كان:

أ) $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارباً، فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون متقارباً.

ب) $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً، فإن $\int_a^\infty g(x)dx$ يكون متباعداً.

مثـــال 21

احسب $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

الحــل

حيث إن $\frac{1}{\sqrt{x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ لكل $x \in 1,\infty)$، ومن الملاحظة السابقة نستطيع استنتاج أن $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ يكون متقارباً؛ لأن $n = 3/2 > 1$، وبذلك $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ يكون متقارباً، وذلك من اختبار المقارنة.

مثـــال 22

احسب $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

الحــل

حيــث إن $\sqrt{1+x^2} \ge \sqrt{1+2x+x^2} = 1+x$ لــكـــل $x \in [2,\infty)$، فـــإن
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{x+1}$$

ولكن $\int_2^\infty \frac{dx}{1+x}$ يكون متباعداً، إذن $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ يكون متباعداً.

نظرية 1

إذا كانت f دالة متصلة على $(-\infty,\infty)$، فإن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ يكون متقارباً، إذا كانت $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ كلاهما متقاربين لأي عدد حقيقي a ويكون:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

مثـــال 23

احسب $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

الحـــل

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to\infty} \tan^{-1}(x+1)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}(b+1) - \tan^{-1}(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

كذلك

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to\infty}\int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to\infty} \tan^{-1}(x+1)\Big|_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(a+1)] = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

إذن $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$

قد يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ معتلاً، حتى على فترة $[a,b]$، ولكن في هذه الحالة يكون للدالة f خط تقارب عمودي عند $x=a$ أو عند $x=b$ أو كليهما.

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة (a,b)، وغير معرّفة عند $x=a$، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (3$$

فإذا كانت النهاية في (3) موجودة، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارباً، وإذا كانت النهاية في (3) غير موجودة، فإننا نقول إن التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متباعداً.

بالكيفية نفسها، نستطيع تعريف:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

إذا كانت الدالة f غير معرّفة عند $x = b$.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ عدا عند $x = c$ حيث $a < c < b$، الذي يكوّن خط تقارب عمودياً للدالة f، فإن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ يكون متقارباً بشرط تقارب $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ ويكون:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

مثـال 24

احسب $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

الحــل

للدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ خط تقارب عمودي عند $x=0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}2\sqrt{x}\Big|_2^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}[2\sqrt{1}-2\sqrt{\varepsilon}]=2$$

مثــال 25

احسب $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

الحــل

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathbf{sin}^{-1}(x/3)\Big|_0^{3-\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}[\mathbf{sin}^{-1}\left(\frac{3-\varepsilon}{3}\right)-\mathbf{sin}^{-1}0]=\frac{\pi}{2}$$

مثــال 26

احسب $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$.

الحــل

نلاحظ أن $x=1$ هو خط تقارب عمودي للدالة f.

إذن

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}=\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}+\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

الآن

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^{2/3}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}(3\sqrt[3]{x-1})\Big|_0^{1-\varepsilon}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}3[\sqrt[3]{-\varepsilon}-\sqrt[3]{-1}]=3$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (3\sqrt[3]{x-1})\Big|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3[\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{3}] = 3$$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3+3=6$$

تمارين 5.10

في التمارين من 1 إلى 20، حدّد ما إذا كان التكامل المعطى متقارباً أو متباعداً، واحسب التكامل المتقارب:

(1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

(2 $\displaystyle\int_0^\infty e^{x/2}dx$

(3 $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}dx$

(4 $\displaystyle\int_e^\infty (x-1)e^{-x}dx$

(5 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\log x}dx$

(6 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$

(7 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$

(8 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+1}\log x}$

(9 $\displaystyle\int_{-\infty}^9 \frac{dx}{(9-x)^2}$

(10 $\displaystyle\int_{-\infty}^9 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(11 $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

(12 $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{1/3}}$

(13 $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$

(14 $\int_{0}^{\pi/2} \sec x \, dx$

(15 $\int_{2}^{5} \frac{2x-6}{x^2-6x+5} dx$

(16 $\int_{1}^{3} \frac{x dx}{2-x}$

(17 $\int_{-1}^{1} \frac{e^{-1/x} dx}{x^2}$

(18 $\int_{0}^{4} \frac{dx}{16-x^2}$

(19 $\int_{0}^{9} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(20 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x(x+1)}$