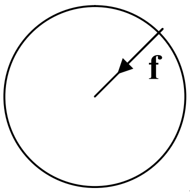
الباب الثالث
المسارات المركزية أو المدارات المركزية

عرف المسار المركزي:-
المسار المركزي هو المنحنى الذي يرسمه جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية



عرف القوة المركزية وما هي الإحداثيات المناسبة لدراسة الحركة :-
القوة المركزية : هي قوة تتجه دائما نحو نقطة ثابتة تعرف هذه النقطة بمركز القوة المركزية
والإحداثيات المناسبة لدراسة الحركة : هي الإحداثيات القطبية

اكتب معادلتي حركة جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية ومنها استنتج المعادلة التفاضلية للمسار المركزي وما هي الصيغة المناظرة للسرعة:-
معادلتي حركة جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية هما:-

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mf \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

لاستنتاج المعادلة التفاضلية للمسار (المدار) المركزي نفرض

$$r = \frac{1}{u} \qquad \textbf{(3)}$$

نفاضل المعادلة (3) بالنسبة للزمن نحصل على:-

$$\dot{r} = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad \textbf{(4)}$$

بتكامل المعادلة (2) تحصل على

$$r^2\dot{\theta} = h$$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = hu^2 \qquad \textbf{(5)}$$

بالتعويض من (5) في (4) نحصل على

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta} \qquad \textbf{(6)}$$

بتفاضل (6) بالنسبة إلى الزمن نحصل على

$$\ddot{r} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$\ddot{r} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} \qquad (7)$$

بالتعويض من (5) في (7) نحصل على :-

$$\ddot{r} = -h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \qquad (8)$$

بالتعويض من (8),(5),(3) في (1)نحصل على المعادلة التفاضلية للمسار المركزي على الصورة

$$-h^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4 = -f$$

$$f = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) \qquad (9)$$

وهذه هي صيغة بني للمعادلة التفاضلية للمسار المركزي

وحيث أن مربع السرعة في الإحداثيات القطبية هي:-

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad (10)$$

وبالتعويض من (6) ,(5),(3) في (10) نحصل على:-

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad (11)$$

اثبت أن الخط الواصل من الشمس إلى الكوكب يمسح مساحات متساوية فى أزمنة متساوية أي أن السرعة المساحية تكون ثابتة.

الحل

حيث أن السرعة المساحية هي معدل تغير المساحة بالنسبة للزمن من هندسة الشكل يكون

$$dA = \frac{1}{2}r^2 \sin d\theta$$

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

بقسمة طرفي (1) على dt نحصل على السرعة المساحية

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\theta'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

المعنى الهندسي للثابت h يتمثل في أنه ضعف السرعة المساحية
اثبت أن مقدار السرعة عند أي نقطة على المسار المركزي يتناسب عكسيا مع طول العمود الساقط من مركز القوة على المماس عند النقطة

نأخذ عزم السرعة حول النقطة o

$$M_o = \vec{r} \wedge \vec{v}$$
$$M_O = r\hat{e}_1 \wedge \left(r'\hat{e}_1 + r\theta'\hat{e}_2\right)$$
$$M_O = r^2\theta'\hat{e}_3$$

حيث e_3 عمودي على e_2 , e_1

$$\left|M_o\right| = r^2\theta' \qquad (1)$$

وأيضا مقدار العزم حول o يمكن كتابته على الصورة

$$\left|M_O\right| = VP \qquad (2)$$

من (1)

$$r^2\theta' = vp$$

$$h = vp$$

$$v = \frac{h}{p}$$

استنتج معادلة البدال للمدار المركزي باستخدام الإحداثيات القطبية.
حيث أن مقدار السرعة عند أي نقطة على المسار المركزي يتناسب عكسيا مع طول العمود الساقط من المركز على اتجاه الحركة فإن $v = \dfrac{h}{p}$ وبذلك يكون

$$\therefore v^2 = \frac{h^2}{p^2} \qquad (1)$$

وحيث أن

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad (2)$$

وبالتعويض من(2) في (1) نحصل على

$$\frac{1}{p^2} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 \qquad (3)$$

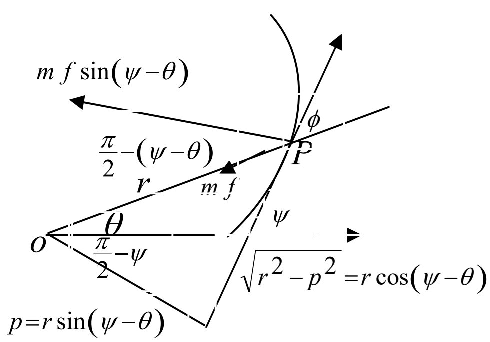
بتفاضل (3) بالنسبة إلى uنحصل على

$$\frac{-2}{p^3}\frac{dp}{dr}\frac{dr}{du}=2\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{du}\right)+2u$$

$$\frac{-2}{p^3}\frac{dp}{dr}\left(\frac{-1}{u^2}\right)=2\frac{d^2u}{d\theta^2}+2u$$

$$\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr}=u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=\frac{f}{h^2}$$

$$f=\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$$



استنتج معادلة البدال للمدار المركزي باستخدام الإحداثيات الذاتية.

بكتابة معادلة الحركة في الإتجاه العمودي على المماس نجد أن

$$m\frac{v^2}{\rho}=m\,f\cos\theta=m\,f\;p/r \quad (1)$$

المعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة التلية

$$\frac{v^2}{\rho}=f\;p/r \quad (2)$$

وحيث أن مقدار السرعة عند أي نقطة على المسار المركزي تتناسب عكسيا مع طول العمود الساقط من مركز الجذب على اتجاه الحركة فإن

$$\dot{s}=v=h/p \quad (3)$$

ومن هندسة الشكل يتضح أن

$$\tan\phi=\frac{p}{\sqrt{r^2-p^2}}=\tan(\psi-\theta)=r\frac{d\theta}{dr} \quad (4)$$

ومن المعادلة (4) نحصل على $\phi=\psi-\theta$ وحيث أن ϕ لاتتغير عند أي نقطة على المسار المركزي فإن

$$d\phi=d\psi-d\theta=0\Rightarrow d\psi=d\theta \quad (5)$$

وحيث أن نصف قطر التقوس للمسار يعين من العلاقة

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=\frac{ds}{d\,r}\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{d\psi} \quad (6)$$

وبالتعويض من (5) في (6) نحصل على

$$\rho=\frac{ds}{d\,r}\frac{dr}{d\theta} \quad (7)$$

ومن المعادلة (4) نحصل على

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r\sqrt{r^2-p^2}}{p} \quad (8)$$

وحيث أن $ds=\sqrt{(dr)^2+(rd\theta)^2}$ في الإحداثيات القطبية فإن

$$\frac{ds}{dr}=\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \qquad (9)$$

وبالتعويض من (4) في (9) نحصل على

$$\frac{ds}{dr}=\frac{r}{\sqrt{r^2-p^2}} \qquad (10)$$

وبالتعويض من (10),(8) في (7) نحصل على

$$\rho=\frac{r^2}{p} \qquad (11)$$

وبتفاضل طرفي (4) بالنسبة إلى r نحصل على

$$r\frac{dr}{dp}=\frac{r^2}{p} \qquad (12)$$

ومن المعادلتين (12) ,(11) نحصل على

$$\rho=r\frac{dr}{dp} \qquad (13)$$

وبالتعويض من (13) ,(3) في (2) نحصل على معادلة البدال على الصورة التالية

$$f=\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}$$

استنتج المعادلة التفاضلية للمسار المركزي باستخدام قاعدة الشغل.

الحل

حيث أن الشغل يساوى التغير في طاقة الحركة أي أن :-

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_\circ^2=\int_{r_\circ}^{r}\vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (1)$$

وحيث أن $\vec{F}=-m\,f\,\hat{e}_1,\ d\vec{r}=dr\,\hat{e}_1$ فإن

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=-m\,f\,dr \qquad (2)$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على

$$v^2-v_\circ^2=-2\int_{r_\circ}^{r}f\,dr \qquad (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$v^2-v_\circ^2=-2\int_{r_\circ}^{r}f\frac{dr}{d\theta}d\theta \qquad (4)$$

بتفاضل (4) بالنسبة إلى θ نحصل على

$$2v\frac{dv}{d\theta}=-2f\frac{dr}{d\theta} \qquad (5)$$

وحيث أن

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \qquad (6)$$

وبتفاضل (6) بالنسبة إلى θ نحصل على

$$v\frac{dv}{d\theta} = h^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \qquad (7)$$

وحيث أن $r = \dfrac{1}{u}$ فإن

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \qquad (8)$$

وبالتعويض من (7) ،(8) في (5) نحصل على

$$f = h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار المركزي.

عرف الأبس (القبا) والبعد الأبسى أو البعد القبوى وكيف يمكن تعيين الأبعاد الأبسية

الحل

الأبس (القبا): هى نقطة على المسار المركزبحيث يكون عندها السرعة عمودية على البعد القطبى

البعد القبوى أو الأبسى: هو البعد بين الأبس ومركز القوة

وتعين الأبعاد الأبسية من الشرط

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$r\hat{e}_r \cdot \left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\right)$$

$$r\,\dot{r} = 0$$

$$\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

وهذا الشرط يعين الأبعاد القبوية

أحد تطبيقات المسارات المركزية (قوانين كبلرالثلاثة)

أذكر قوانين كبلر الثلاثة. ثم برهن القانون الثالث لكبلر.

الحل

1-الكواكب تدور حول الشمس في قطوع نا قصية بحيث تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

2-الخط الواصل بين الشمس والكواكب يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية أي ان السرعة المساحية للكواكب تكون ثابتة
3-مربع الزمن الدوري للكوكب يتناسب طرديا مع مكعب نصف المحور الأكبر للقطع

$$T^2 \propto a^3$$

لإثبات القانون الثالث لكبلر نعلم أن

الزمن الدوري للكوكب = $\dfrac{\text{مساحة القطع الناقص}}{\text{السرعة المساحية}}$

الزمن الدوري: -

$$T = \frac{\pi a b}{h/2} = \frac{2\pi a b}{h} \quad \textbf{(1)}$$

من قانون نيوتن الثانى نعلم أن

$$f = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (2)$$

ومن قانون نيوتن للجذب العام نعلم أن

$$f = \frac{\gamma \mu}{r^2} = \mu u^2 , \mu = \gamma m \quad (3)$$

من (3) ,(2) نحصل على

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \quad \textbf{(4)}$$

المعادلة (4) حلها العام

$$u = \mathrm{A} Cos(\theta + \in) + \frac{\mu}{h^2}$$

$$r = \frac{h^2}{Ah^2 Cos(\theta + \in) + \mu} \quad \textbf{(5)}$$

وحيث أن مسار الكواكب حول الشمس على شكل قطع ناقص فإن:

$$r = \frac{L}{1 + eCos\theta} \quad \textbf{(6)}$$

حيث L نصف طول الوتر البؤري العمودي وe الاختلاف المركزي
(5) يمكن كتابتها على الصورة

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{\frac{Ah^2}{\mu} Cos(\theta + \varepsilon) + 1} \quad \textbf{(7)}$$

بمقارنة(7) ,(6) نحصل علي

$$l = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow h^2 = \mu l$$

من خواص القطع الناقص

$$l = \frac{b^2}{a}$$

$$h^2 = \frac{\mu b^2}{a}$$

$$h = \sqrt{\frac{\mu}{a}} b \qquad \textbf{(8)}$$

وبالتعويض من (8) في (1) نحصل على

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi\, a\, b\sqrt{a}}{\sqrt{\mu} b} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \qquad \textbf{(9)}$$

بتربيع طرفي (9) نحصل على $\mathrm{T}^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$

$$\therefore \mathrm{T}^2 \propto a^3$$

مثال

إذا كان V', V هما على الترتيب أكبر و أصغر سرعة لكوكب يدور حول الشمس فأوجد الاختلاف المركزي لمسار الكوكب .

الحل

حيث ان V^2 في المسارات المركزية تكون على الصورة:-

$$V^2 = h^2[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2]. \quad \textbf{(1)}$$

و حيث أن مسار الكوكب يكون على شكل قطع ناقص معادلته

$$u = \frac{1}{L} + \frac{e}{L}\cos\theta \quad (2)$$

تفاضل (2) بالنسبة إلى θ نحصل على

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-e}{l} Sin\theta \, \textbf{(3)}$$

و بالتعويض من (3) ,(2) في (1) نحصل على

$$v^2 = \frac{h^2}{L^2}\left(1 + 2e\cos\theta + e^2\right)$$

وحيث أن $1 \le \cos\theta \le 1$ فإن

$$v_{\max}^2 = \frac{h^2}{L^2}(1+e)^2 \quad (4)$$

$$v_{\min}^2 = \frac{h^2}{L^2}(1-e)^2 \quad (5)$$

وبقسمة (4) على (5) نحصل على

$$\frac{v_{\max}^2}{v_{\min}^2} = \frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} = \frac{V'^2}{V^2} \quad (6)$$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفى (6) والتبسيط نحصل على

$$e = \frac{V' - V}{V' + V} < 1$$

<u>مثـال</u>

أوجد الشرط الذي يجب أن تحققه القوه المركزية لوحدة الكتل حتى تكون الحركة المدارية مستقرة وإذا توفر هذا الشرط اوجد الزوايا الأبسية المناظرة لاستقرار الحركة

<u>**الحل**</u>

حيث أن القوه المركزية لوحدة الكتل من قانون نيوتن الثاني هي

$$f = h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right] \quad (1)$$

بفرض أن المسار علي شكل دائرة نصف قطرها $\frac{1}{b}$ وبعمل إزاحة صغيره x وباستخدام التحويل

$$u = x + b \quad (2)$$

وبتفاضل (2) مرتين بالنسبة إلي θ نحصل علي

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d^2x}{d\theta^2} \quad (3)$$

المعادلة (1) يمكن كتابتها علي الصورة

$$\frac{f}{h^2u^2} - u = \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (4)$$

وبالتعويض من (3),(2) في (4) نحصل علي

$$\frac{f(x+b)}{h^2(x+b)^2} - (x+b) = \frac{d^2x}{d\theta^2} \quad (5)$$

وباستخدام مفكوك تيلور للدالة $f(x+b)$ نجد أن

$$f(x+b) = f(b) + f'(b)x + \frac{f''(b)x^2}{2!} + \ldots\ldots \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (5) نحصل علي

$$\left[\frac{f(b) + f'(b)x}{h^2b^2}\right]\left[1 + \frac{x}{b}\right]^{-2} - (x+b) = \frac{d^2x}{d\theta^2}$$

$$\frac{[f(b) + f'(b)x]\left[1 - \frac{2x}{b}\right] - x - b}{h^2b^2} = \frac{d^2x}{d\theta^2} \quad (7)$$

لتعين h عندما $u = b$ كانت $\frac{d^2u}{d\theta} = 0$

$$f = h^2b^3 \Rightarrow h^2 = f\frac{(b)}{b^3}$$

وبذلك تصبح (7) علي الصورة

$$x\left(\frac{bf'(b)}{f(b)}-3\right)=\frac{d^2x}{d\theta^2} \quad (8)$$

شرط استقرار الحركة هو أن يكون معامل x اقل من الصفر أي أن

$$\frac{bf'(b)}{f(b)}<3$$

$$\omega^2=3-\frac{bf'(b)}{f(b)}$$

ولإيجاد الزوايا ألابسيه هو أن نوجد الحل العام للمعادلة (8) وتفاضله بالنسبة إلى θ ثم نساويه بالصفر فنحصل على الزوايا ألابسيه المناظرة لاستقرار الحركة

$$x=A\cos(\omega\theta+\varepsilon),\omega=\sqrt{3-\frac{bf'(b)}{f(b)}} \quad (11)$$

وبتفاضل (11) بالنسبة إلى θ ونساويه بالصفر نحصل على

$$\frac{dx}{d\theta}=-A\omega\sin(\omega\theta+\varepsilon)=0 \quad (12)$$

ولكي تتحقق (12) يجب أن يكون

$$\omega\theta_n+\varepsilon=n\pi, n=0,1,2,\cdots \quad (13)$$

وبوضع $n+1$ بدلا من n في (13) نحصل على

$$\omega\theta_{n+1}+\varepsilon=(n+1)\pi \quad (14)$$

بطرح (13) من (14)نحصل على

$$\omega(\theta_{n+1}-\theta_n)=\pi$$

تمثل الزاوية ألابسيه المناظرة للحركة المستقرة $\theta_{n+1}-\theta_n=\dfrac{\pi}{\omega}$

ملحـــــــــــــــوظة

الزاوية الأبسية هي الزاوية المحصورة بين أبسين متتالين.

مثال

إذا تحرك جسيم في مسار مركزي على شكل قطع ناقص معادلته القطبية $r=\dfrac{L}{1+e\cos\theta}$ حيث

L هو طول الوتر البؤري العمودي و e الاختلاف المركزي وذلك تحت تأثير قوة F تتجه دائما نحو البؤرة. أثبت أن قانون القوة هو قانون التربيع العكسي.

الحـــــل

حيث أن قانون القوة المركزية يعين من العلاقة التالية

$$f=h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] \quad (1)$$

و حيث أن المعادلة القطبية للقطع الناقص هي

$$\because r=\frac{l}{1+e\cos\theta}$$

$$\therefore u=\frac{1}{l}+\frac{e\cos\theta}{l} \qquad (2)$$

وبتفاضل (2) مرتين بالنسبة إلي θ نحصل على

$$,\ \frac{du}{d\theta}=\frac{-e}{l}\sin\theta,\ \ \frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{-e}{l}\cos\theta \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) ,(2) في (1) نحصل على

$$f=h^2\left(\frac{1}{l^2}+\frac{2e\cos\theta}{l^2}+\frac{e^2\cos^2\theta}{l^2}\right)\left(\frac{-e\cos\theta}{l}+\frac{e\cos\theta}{l}+\frac{1}{l}\right)$$

$$f=\frac{h^2}{l^3}(1+e\cos\theta)^2=\frac{h^2}{l}\left(\frac{1+e\cos\theta}{l}\right)^2$$

$$f=\frac{h^2}{l}u^2=\frac{h^2}{l}\times\frac{1}{r^2}$$

$$\therefore\ f=\frac{k}{r^2},\ k=\frac{h^2}{l}$$

أي أن f تحقق قانون التربيع العكسي.

<u>مثـــال</u>

قذف جسيم بسرعة $\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}$ من أبس علي بعد a من مركز الجذب o لقوة مركزية مقدارها $\lambda(u^2-au^3)$ لوحدة الكتل أثبت أن البعد القبوي الأخر يساوي $3a$ وأوجد معادلة المسار.

<u>الحـــل</u>

حيث أن المعادلة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$f=h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \qquad (1)$$

وحيث أن القوة المركزية مقدارها $\lambda(u^2-au^3)$ لوحدة الكتل فإن $f=\lambda(u^2-au^3)$

و بذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\lambda u^2(1-au)=h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right] \qquad (2)$$

و بتكامل (2) بالنسبة إلى u نحصل على

$$\lambda\left(u-\frac{au^2}{2}\right)=\frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{du}{du}\right)^2+u^2\right]+c_1 \quad (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\lambda\left(u-\frac{au^2}{2}\right)=\frac{v^2}{2}+c_1 \qquad (4)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الابتدائية للحركة هي عند $u=\frac{1}{a}$ كانت $v=\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}$ ومنها

نحصل على $c_1=-\frac{\lambda}{4a}$ وبذلك تصبح (4) على الصورة

$$\lambda\left(u-\frac{au^2}{2}\right)=\frac{v^2}{2}+\frac{\lambda}{4a} \qquad (5)$$

ولتعيين الأبعاد الأبسية نضع $\frac{du}{d\theta}=0$ وتصبح

$$v^2=h^2u^2$$

$$\lambda\left(u-\frac{au^2}{2}\right)=\frac{h^2u^2}{2}+\frac{\lambda}{4a} \qquad (6)$$

وحيث ان $v=h/p$ وعند الأبس يكون $p=a\,,V=\sqrt{\frac{\lambda}{2a}}$

$$\therefore h=\sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$$

وتصبح (6) علي الصورة

$$\lambda\left(u-\frac{au^2}{2}\right)=\frac{\lambda a}{4}u^2+\frac{\lambda}{4a} \qquad (7)$$

وبتبسيط المعادلة (7) نحصل على

$(3au-1)(au-1)=0$ وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى u نحصل على البعد القبوى الاخر يساوى $3a$

وبالتعويض عن $h=\sqrt{\frac{\lambda\, a}{2}}$ فى (2) نحصل على

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+3u=\frac{2}{a} \qquad (8)$$

المعادلة (8) معادلة تفاضلية غير متجانسة حلها العام على الصورة

$$u=A\cos\sqrt{3}\,\theta+B\sin\sqrt{3}\,\theta+\frac{2}{3a} \qquad (9)$$

حيث A,B ثابتان يعينان من الشروط الابتدائيه من الحركة و هى عند $\theta=0$ كانت

$u=\frac{1}{a},\frac{du}{d\theta}=0$ ومنها نحصل على $A=\frac{1}{3a},B=0$ وبذلك تصبح (9) على الصورة التالية

$$u=\frac{2+\cos\sqrt{3}\,\theta}{3a} \qquad (10)$$

وبذلك تكون معادلة المسار على الصورة $r=\frac{3a}{2+\cos\sqrt{3}\,\theta}$.

مثال

يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية جاذبة مقدارها $m\mu / r^3$ وإذا قذف الجسيم من أبس على بعد a من المركز بسرعة مقدارها $\sqrt{2}$ السرعة في دائرة نصف قطرها a أوجد معادلة المسار.

الحل

لإيجاد السرعة في دائرة نطبق قانون نيوتن الثاني لجسيم يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها a تحت تأثير قوة الجذب عند $r = a$ فنحصل على

$$v_c^2 = \frac{\mu}{a^2} \Rightarrow v_c = \frac{\sqrt{\mu}}{a} \quad (1)$$

وحيث أن $v = \sqrt{2} v_c = \frac{\sqrt{2\mu}}{a} = \frac{h}{a}$ فإن

$$h = \sqrt{2\mu} \quad (2)$$

وحيث أن القوة المركزية لوحدة الكتل تعين من المعادلة

$$f = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (3)$$

وحيث أن $f = \mu u^3, h = \sqrt{2\mu}$ فإن المعادلة (3) تصبح على الصورة

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{1}{2} u \quad (4)$$

والمعادلة (4) تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة حلها العام

$$u = A \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \theta + B \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \theta \quad (5)$$

حيث A, B ثابتان يعينان من الشروط الإبتدائية للحركة وهي عند $\theta = 0$ كانت $u = \frac{1}{a}, \frac{du}{d\theta} = 0$

ومنها نحصل على أن $A = \frac{1}{a}, B = 0$ وبذلك تصبح (5) على الصورة

$$u = \frac{1}{a} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \theta \quad (6)$$

ومن (6) نحصل على معادلة المسار على الصورة

$$a = r \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \theta \quad (7)$$

مثال

اذا كان جسيم يتحرك فى مسار مركزى على شكل دائرة معادلته القطبية $r = a\cos\theta$ حيث a ثابت أثبت أن القوة المؤثرة على الجسيم نحو المركز تتناسب عكسيا مع r^5

الحـل

حيث أن القوة المركزية لوحدة الكتل تعين من المعادلة

$$f = h^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \qquad (1)$$

وحيث أن $r = a\cos\theta$ فإن

$$u = \frac{\sec\theta}{a} \qquad (2)$$

وبتفاضل (2) مرتين بالنسبة الى θ نحصل على

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{a}\left(2\sec^3\theta - \sec\theta\right) \quad (3)$$

و بالتعويض من(3) ,(2)فى (1) نحصل على

$$f = \frac{h^2}{a^2}\sec^2\theta\left(\frac{2\sec^3\theta - \sec\theta}{a} + \frac{\sec\theta}{a}\right)$$

$$f = \frac{2h^2\sec^5\theta}{a^3} = \frac{2h^2}{a^3}\left(a^5 u^5\right) = 2a^2 h^2 u^5 = \frac{2a^2 h^2}{r^5}$$

$$f \,\alpha\, \frac{1}{r^5}$$

مثال:

أوجد مقدار القوة المركزية اللازمة نحو القطب o حتى يتحرك جسيم على منحنى الكاردويد $r = a(1-\cos\theta)$ وأثبت أنه إذا كانت سرعة الجسيم عند الأبس تساوي V ومقدار القوة عند الأبس تساوي F فإن $3V^2 = 4aF$.

الحل

حيث أن القوة المركزية لوحدة الكتل تعين من المعادلة

$$f = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \qquad (1)$$

وحيث أن المعادلة القطبية لمسار الكاردويد هي

$$r = a(1-\cos\theta) \qquad (2)$$

وحيث أن $u = \frac{1}{r}$ فإن المعادلة (2) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$u=\frac{1}{a(1-\cos\theta)} \qquad (3)$$

ومن (3) نحصل على أن

$$\cos\theta=1-\frac{1}{a\,u} \qquad (4)$$

وبتفاضل (3) بالنسبة إلى θ واستخدام (3) نحصل على

$$\frac{d\,u}{d\,\theta}=\frac{-a\sin\theta}{a^2(1-\cos\theta)^2}=-a\sin\theta\,u^2 \qquad (5)$$

وبتفاضل (5) بالنسبة إلى θ واستخدام (5) ,(4)نحصل على

$$\frac{d^2\,u}{d\,\theta^2}=3\,a\,u^2-u \qquad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (1) نحصل على

$$f=3\,a\,h^2\,u^4 \qquad (7)$$

وحيث أنه عند الأبس يكون $\frac{d\,r}{d\theta}=0$ أو $\frac{d\,u}{d\theta}=0$ فإن $\sin\theta=0$ عندما π أو $\theta=0$

وبالتالي فإنه عند الأبس يكون

$$u=\frac{1}{2\,a} \qquad (8)$$

$$V^2=h^2\,u^2 \qquad (9)$$

وبالتعويض من (9) في (7) واستخدام (8) نحصل على

$$4\,a\,F=3V^2 \qquad (10)$$ حيث $f=F$ عند الأبس

مثال

أوجد المعادلة المماسية القطبية للمنحنى $r^n=a^n\cos n\theta$ حيث a,n ثابتان ومن ذلك أوجد قانون القوة المركزية الذي يؤثر على جسيم نحو القطب بحيث يرسم الجسيم هذا المنحنى وأوجد أيضا قانون تغير السرعة.

الحل

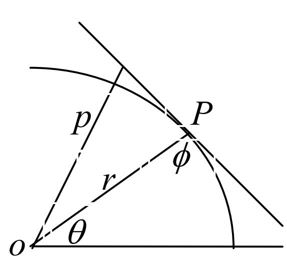
حيث أن المعادلة المماسية القطبية للمنحنى $r^n=a^n\cos n\theta$ يمكن إيجادها بإيجاد $p=p(r)$

حيث p هي طول العمود الساقط من مركز الجذب على اتجاه الحركة للجسيم

من هندسة الشكل يتضح أن

$$p=r\sin\phi \qquad (1)$$

حيث ϕ هي الزاوية المحصورة بين المماس عند النقطة P على المنحنى والإتجاه المركزي oP فإن



$$\tan\phi = \frac{r\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \quad (2)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي لطرفي معادلة المسار نحصل على

$$n\ln r = n\ln a + \ln\cos n\theta \quad (3)$$

وبتفاضل طرفي (3) بالنسبة إلى θ نحصل على

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = -n\tan n\theta \quad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (2) نحصل على

$$\tan\phi = -\cot n\theta = \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + n\theta\right) \quad (5)$$

ومن العادلة (5) يتضح أن $\phi = \frac{\pi}{2} + n\theta$ وبذلك تصبح (1) على الصورة

$$p = r\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + n\theta\right) = r\cos n\theta \quad (6)$$

ومن معادلة المسار تصبح (6) على الصورة

$$p = r^{n+1}/a^{n} \quad (7)$$

والمعادلة (7) تمثل المعادلة المماسية القطبية للمسار. ولإيجاد قانون القوة المركزية نستعمل معادلة البدال التي على الصورة

$$f = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} \quad (8)$$

وبالتعويض من (7) في (8) نحصل على

$$f = \frac{h^2(n+1)a^{2n}}{r^{2n+3}} \quad (9)$$

وتتعين السرعة عند أي موضع من العلاقة

$$v = \frac{h}{p} = \frac{h\,a^{n}}{r^{n+1}} \quad (10)$$

<u>مثال</u>

أثبت أن سرعة الكوكب عند أي نقطة على مساره تتعين من العلاقة $v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ حيث a نصف طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي يتحرك عليه الكوكب، k ثابت.

<u>الحل</u>

حيث أن مسار أي كوكب حول الشمس يكون قطع ناقص فإن معادلته القطبية تكون على الصورة التالية

$$r = \frac{L}{1 + e\cos\theta} \quad (1)$$

حيث L نصف طول الوتر البؤري العمودي، e الإختلاف المركزي.
وحيث أن العلاقة بين مربع السرعة والصورة التفاضلية للمسار المركزي هي

$$v^2 = h^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right] \quad (2)$$

وحيث أن $u = \dfrac{1}{r}$ فإن المعادلة (1) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$u = \frac{1}{L} + \frac{e}{L}\cos\theta \quad (3)$$

وبتفاضل (3) بالنسبة إلى θ نحصل على

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{L}\sin\theta \quad (4)$$

وبالتعويض من (4) ,(3) في (2) نحصل على

$$v^2 = h^2\left(\frac{1+e^2+2e\cos\theta}{L^2}\right) \quad (5)$$

ومن المعادلة (1) نحصل على

$$e\cos\theta = \frac{L}{r} - 1 \quad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (5) واستخدام العلاقة $L = a\left(1-e^2\right)$ نحصل على

$$v^2 = \frac{h^2}{L}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (7)$$

حيث $k = \dfrac{h^2}{L}$.