الباب الرابع

الحركة المستوية للجسم المتماسك

عرف الجسم المتماسك أو الصلب ـ الحركة المستوية للجسم المتماسك ثم اذكر أنواع الحركة المستوية للجسم المتماسك.

ـ الجسم المتماسك هو الجسم المكون من عدد كبير جدا من النقاط المادية بحيث تكون المسافة بين أي نقطتين فيه ثابتة لا تتغير بتأثير القوى الخارجية ولا يتغير شكله ولا حجمه أثناء الحركة كما هو موضح بالشكل ..

ـ يقال بأن الجسم المتماسك يتحرك حركة مستوية إذا كانت كل نقطة من نقاطه تتحرك في مستوى موازي لمستوى ثابت (مثلا الأرض) أو إذا كانت جميع نقاطه تتحرك في مستويات متوازية.

أنواع الحركة المستوية للجسم المتماسك :

الحركة انتقالية : وفيها تتحرك كل نقطة من نقاط الجسم المتماسك بسرعة مساوية لسرعة مركز ثقل الجسم المتماسك.

الحركة الدورا نية: وفيها يدور الجسم المتماسك حول مركز ثقله أو حول نقطة ثابتة في الفراغ.

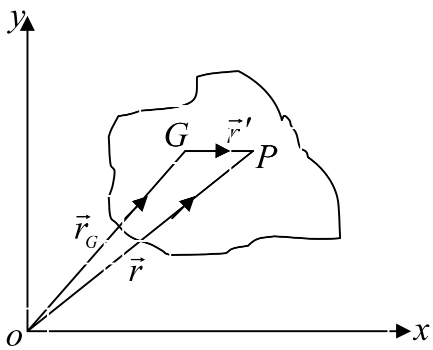
الحركة العامة: وفيها يتحرك الجسم المتماسك حركة انتقالية ودورانية معا.

استنتج طاقة الحركة لجسم متماسك يتحرك حركة مستوية عامة

نأخذ عنصر كتلته δm من الجسم المتماسك الذي يتحرك بسرعة $\vec{v}$ وبالتالي فإن طاقة حركة العنصر تكون δT وتصاغ رياضيا على الصورة التالية

$$\delta T = \frac{1}{2}\delta m v^2 \quad (1)$$

وبتكامل المعادلة (1) نحصل على طاقة حركة الجسم المتماسك الذي يتحرك حركة مستوية عامة على الصورة التالية



$$T = \frac{1}{2}\int v^2 d\,m \qquad (2)$$

من هندسة الشكل نجد أن

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}' \qquad (3)$$

حيث $\vec{r}$ متجه موضع الجسيم P الذي كتلته δm بالنسبة للنقطة o ، $\vec{r}_G$ متجه موضع مركز ثقل الجسم المتماسك G بالنسبة للنقطة o ، $\vec{r}'$ متجه موضع الجسيم P الذي كتلته δm بالنسبة للنقطة G.

وبتفاضل (3) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \qquad (4)$$

المعادلة (4) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \qquad (5)$$

حيث $\vec{\omega}$ متجه السرعة الزاوية ويكون إتجاهه في الإتجاه العمودي على المستوى $x-y$. أي أن

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

وبضرب المعادلة *(5)* قياسيا في نفسها نحصل على

$$v^2 = v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) + \omega^2 r'^2 \qquad (6)$$

مع ملاحظة أن $\vec{\omega}$ ، $\vec{r}'$ متعامدان لذلك فإن $\vec{r}' \cdot \vec{\omega} = 0$

وبالتعويض من (6) في (2) نحصل على

$$T = \frac{1}{2}\int \left[v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) + \omega^2 r'^2\right] d\,m \qquad (7)$$

وحيث أنه من تعريف مركز الثقل وعزم القصور الذاتي نعلم أن $\int r'^2 d\,m$ $\int \vec{r}'d\,m = \vec{0}, I_G =$

حيث I_G هو عزم القصور الذاتي للجسم المتماسك حول G . وبذلك تصبح (7) على الصورة التالية

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega^2 I_G \qquad (8)$$

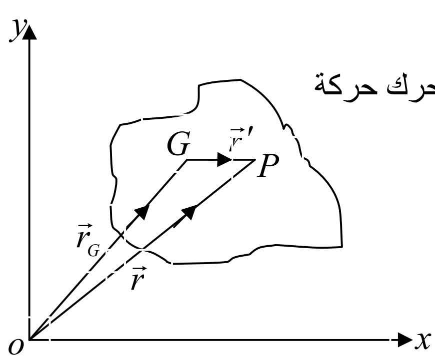
ومن (8) يتضح أن طاقة الحركة لجسم متماسك يتحرك حركة مستوية عامة هي مجموع طاقتي الحركة الإنتقالية والدورانية حيث $\frac{1}{2}Mv_G^2$ تمثل طاقة الحركة الإنتقالية، $\frac{1}{2}\omega^2 I_G$ تمثل طاقة الحركة الدورانية.

و إذا انطبقت o علي G فإن طاقة الحركة تصبح طاقة حركة دور انية فقط أي أن $.T = \frac{1}{2}\omega^2 I_G$

<u>استنتج كمية الحركة الزاوية (عزم كمية الحركة) لجسم متماسك يتحرك حركة مستوية عامة</u>

نأخذ عنصر كتلته δm من الجسم المتماسك الذي يتحرك بسرعة $\vec{v}$ وبالتالي فإن كمية الحركة الزاوية للعنصر تكون $\delta \vec{h}_o$ وتصاغ رياضيا على الصورة التالية

$$\delta \vec{h}_o = \vec{r} \wedge \vec{v}\,\delta m \qquad (1)$$



وبتكامل المعادلة (1) نحصل على كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك يتحرك حركة مستوية عامة على الصورة التالية

$$\vec{h}_o = \int \vec{r} \wedge \vec{v}\, dm \qquad (2)$$

من هندسة الشكل نجد أن

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}' \qquad (3)$$

حيث $\vec{r}$ متجه موضع الجسيم P الذي كتلته δm بالنسبة للنقطة o ، $\vec{r}_G$ متجه موضع

مركز ثقل الجسم المتماسك G بالنسبة للنقطة o ، $\vec{r}'$ متجه موضع الجسيم P

الذي كتلته δm بالنسبة للنقطة G.

وبتفاضل (3) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \qquad (4)$$

المعادلة (4) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \qquad (5)$$

حيث $\vec{\omega}$ متجه السرعة الزاوية ويكون إتجاهه في الإتجاه العمودي على المستوى $x-y$. أي أن

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

وبضرب (5) ,(3) اتجاهيا نحصل على

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{v} &= \left(\vec{r}_G + \vec{r}'\right) \wedge \left(\vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) \\ &= \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + \vec{r}_G \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) + \vec{r}' \wedge \vec{v}_G + \vec{r}' \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}'\right) \\ &= \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + \left(\vec{r}_G \cdot \vec{r}'\right)\vec{\omega} - \left(\vec{r}_G \cdot \vec{\omega}\right)\vec{r}' + \vec{r}' \wedge \vec{v}_G + r'^2\vec{\omega} - \left(\vec{r}' \cdot \vec{\omega}\right)\vec{r}' \end{aligned} \qquad (6)$$

وحيث أن $\vec{r}_G \cdot \vec{\omega} = \vec{r}' \cdot \vec{\omega} = 0$ فإن (6) تصبح على الصورة التالية

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G + \left(\vec{r}_G \cdot \vec{r}'\right)\vec{\omega} + \vec{r}' \wedge \vec{v}_G + r'^2\vec{\omega} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (2) نحصل على

$$\vec{h}_o = \vec{r}_G \wedge \vec{v}_G \int dm + \left(\vec{r}_G \cdot \int \vec{r}' dm\right)\vec{\omega} + \int \vec{r}' dm \wedge \vec{v}_G + \int r'^2 dm\, \vec{\omega} \qquad (8)$$

وحيث أنه من تعريف مركز الثقل وعزم القصور الذاتي نعلم أن $\int \vec{r}' dm = \vec{0}, I_G = \int r'^2 dm$

حيث I_G هو عزم القصور الذاتي للجسم المتماسك حول G . وبذلك تصبح (7) على الصورة التالية

$$\vec{h}_o = \vec{r}_G \wedge M\, \vec{v}_G + I_G\, \vec{\omega} \qquad (9)$$

ومن (9) يتضح أن كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك يتحرك حركة مستوية عامة هي مجموع كميتي الحركة الزاوية الإنتقالية والدورانية حيث $\vec{r}_G \wedge M\,\vec{v}_G$ تمثل كمية الحركة الزاوية الإنتقالية حول o، $I_G\,\vec{\omega}$ تمثل كمية الحركة الزاوية الدورانية حول G.

و إذا انطبقت o علي G فإن كمية الحركة الزاوية تصبح كمية حركة زاوية دور انية فقط أي أن

$$\vec{h}_o = I_G\,\vec{\omega}.$$

اكتب معادلات الحركة لجسم متماسك يتحرك حركة مستوية عامة.

حيث أن الحركة المستوية العامة للجسم المتماسك تتكون من حركة انتقالية وحركة دورانية فإن معادلات الحركة للجسم المتماسك الذي يتحرك حركة مستوية عامة تتكون أيضا من معادلتي حركة انتقالية ومعادلة حركة دورانية حيث معادلتي الحركة الانتقالية تتمثل في قانون مركز الثقل و الذي ينص على أن مركز ثقل الجسم المتماسك يتحرك كجسيم ركزت فيه كتلة الجسم المتماسك كله وسلطت عليه محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم المتماسك

ويصاغ رياضيا على الصورة :

$$M\,\ddot{\vec{r}}_G = \sum \vec{F} \qquad (1)$$

حيث $\ddot{\vec{r}}_G$ *تمثل عجلة مركز الثقل ،* $\sum \vec{F}$ *تمثل محصلة القوى الخارجية المؤثرة على مركز الثقل.*

إذا كان الجسم المتماسك يتحرك في المستوى الديكارتي $(x-y)$ فإن المعادلة (1) تكون على الصورة التالية:

$$M\,\ddot{x}_G = \sum F_x \qquad (2)$$

$$M\,\ddot{y}_G = \sum F_y \qquad (3)$$

حيث $(\ddot{x}_G, \ddot{y}_G)$ هما مركبتي عجلة مركز ثقل الجسم المتماسك، $\sum F_x$ تمثل محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم المتماسك في اتجاه محور x ، $\sum F_y$ تمثل محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم المتماسك في اتجاه محور y.

وإذا كان الجسم المتماسك يتحرك في المستوى القطبي $(r-\theta)$ فإن المعادلة (1) تكون على الصورة التالية:

$$-M\,a\,\dot{\theta}^2 = \sum F_r \qquad (4)$$
$$M\,a\,\ddot{\theta} = \sum F_\theta \qquad (5)$$

حيث $\left(-a\,\dot{\theta}^2, a\ddot{\theta}\right)$ هما مركبتي عجلة مركز ثقل الجسم المتماسك باعتباره يتحرك على محيط دائرة نصف قطرها a ، $\sum F_r$ تمثل محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم المتماسك في اتجاه نصف قطر الدائرة ، $\sum F_\theta$ تمثل محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم المتماسك في اتجاه عمودي على نصف القطر.

ومعادلة الحركة الدورانية تتمثل في قانون كمية الحركة الزاوية والذي ينص على أن معدل التغير في كمية الحركة الزاوية بالنسبة للزمن حول نقطة ثابتة o أو حول مركز الثقل G يساوي محصلة عزوم القوى الخارجية حول نفس النقطة o أو G على الترتيب ويصاغ رياضيا على الصورة

$$\frac{d\vec{h}_\circ}{dt} = \sum \vec{M}_\circ \qquad (1)$$

حيث $\vec{h}_\circ$ *يمثل كمية الحركة الزاوية حول* o ، $\sum \vec{M}_\circ$ *يمثل مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على مركز الثقل حول* o.

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{v}_G \wedge M\,\vec{v}_G + \vec{r}_G \wedge M\,\vec{f}_G + I_G\,\dot{\vec{\omega}} = \sum \vec{M}_\circ \qquad (2)$$

حيث $\vec{f}_G$ تمثل عجلة مركز ثقل الجسم المتماسك . والمعادلة (2) *يمكن كتابتها على الصورة التالية*

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{r}_G \wedge M\,\vec{f}_G + I_G\,\dot{\vec{\omega}} = \sum \vec{M}_\circ \qquad (3)$$

حالة خاصة :

إذا انطبق $_o$ على $_G$ فإن المعادلة (3) *تصبح على الصورة التالية*

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = I_G\,\dot{\vec{\omega}} = \sum \vec{M}_G \qquad (4)$$

والمعادلة الأخيرة تمثل معادلة الحركة الدورانية .

التدحرج و الانزلاق لجسم متماسك

عرف التدحرج و الانزلاق لجسم متماسك.

هما ظاهرتان تحدثان عندما يتحرك الجسم المتماسك علي مستوي خشن حيث انه عند نقطة التقاء الجسم المتماسك مع المستوي الخشن تنشأ قوتان أحدهما عمودية علي المستوي و تسمي قوة رد الفعل R و الأخرى مماسية للمستوي و تسمي قوة الاحتكاك F .

حيث تحدث ظاهرة التدحرج للجسم المتماسك عندما يكون $F < \mu R$

و تحدث ظاهرة الانزلاق للجسم المتماسك عندما يكون $F \geq \mu R$

حيث μ تمثل معامل الاحتكاك للمستوي الخشن وتسمي μR قوة الاحتكاك النهائي (القيمة العظمي لقوة الاحتكاك)

إذا كانت سرعة نقطة التقاء الجسم المتماسك مع المستوي الخشن تساوي صفر أي أنه عندما تكون $V_c = 0$ تحدث ظاهرة التدحرج.

وإذا كانت سرعة نقطة التقاء الجسم المتماسك مع المستوي الخشن لا تساوي صفر أي أنه عندما تكون $V_c \neq 0$ تحدث ظاهرة الانزلاق. حيث V_c تمثل محصلة سرعة مركز الثقل G بالإضافة إلي السرعة النسبية للنقطة c بالنسبة إلي G أي أن $V_c = V_G + V_{cG}$

مع ملاحظة انه إذا كانت الحركة تدحرجيه فان قوة الاحتكاك F تكون عكس السرعة الخطية لمركز ثقل الجسم المتماسك.

و إذا كانت الحركة إنزلاقية فان قوة الاحتكاك F تكون عكس السرعة الخطية لنقطة تماس الجسم المتماسك مع المستوى الخشن .

مثال:

خيط رفيع يتدلى من طرفيه كتلتان M, M' ويمر على بكرة خشنة تماما كتلتها m ونصف قطرها a وتستطيع أن تدور حول محور أفقي أملس مثبت مار بمركزها وعمودي على مستواها. إذا لم ينزلق الخيط على البكرة وكانت M الكتلة الهابطة فأوجد عجلتها.

الحل

معادلتا الحركة الإنتقالية للكتلتين M, M' هما

$$M\ddot{x} = Mg - T \quad (1)$$

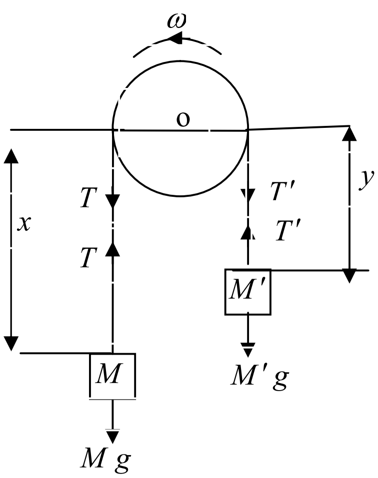
$$M'\ddot{y} = M'g - T' \quad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية للبكرة هي

$$I_o\,\ddot{\theta} = T\,a - T'\,a \qquad (3)$$

وحيث أن $I_o = m\,k^2$ فإن المعادلة (3) تصبح على الصورة

$$m\,k^2\,\ddot{\theta} = (T - T')a \qquad (4)$$



ومن الشروط الكينماتيكية للحركة يكون

$$\pi\,a + x + y = l \qquad (5)$$ حيث l هو طول الخيط

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \qquad (6)$$

وباستخدام (6) في (4) نحصل على

$$\frac{m\,k^2}{a^2}\,\ddot{x} = T - T' \qquad (7)$$

وباستخدام (5) في (2) نحصل على

$$-M'\,\ddot{x} = M'\,g - T' \qquad (8)$$

وبطرح (1) من (8) نحصل على

$$T - T' = -(M + M')\ddot{x} - (M' - M)g \qquad (9)$$

وبالتعويض من (9) في (7) نحصل على

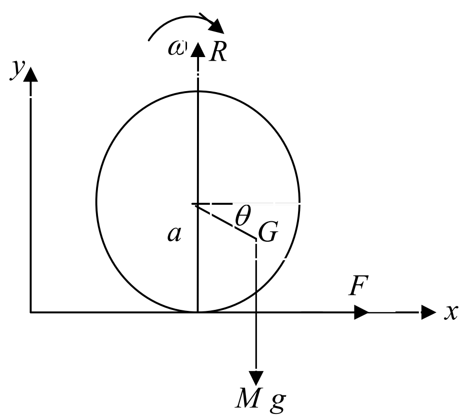
$$\ddot{x} = \frac{(M' - M)g}{\frac{m\,k^2}{a} + M + M'} \qquad (10)$$

<u>مثال:</u>

وضعت كرة نصف قطرها a ومركز ثقلها G على بعد c من مركزها الهندسي o على مستوى أفقي خشن بحيث كان oG أفقيا أثبت أن الكرة ستبدأ في التدحرج أو في الانزلاق من السكون حسبما تكون $\mu > a\,c\left(a^2 + k^2\right)^{-1}$ أو $\mu < a\,c\left(a^2 + k^2\right)^{-1}$ على الترتيب حيث k

نصف قطر القصور الذاتي حول محور أفقي مار بمركز ثقلها. وماذا يحدث عندما μ تساوي هذه القيمة حيث μ معامل احتكاك المستوى الأفقي الخشن.

الحل



معادلتا الحركة الإنتقالية لمركز ثقل الكرة هما

$$M\,\ddot{x} = F \qquad (1)$$

$$M\,\ddot{y} = R - Mg \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية حول مركز الثقل G هي

$$I_G\,\ddot{\theta} = R\,c\cos\theta - F(a - c\sin\theta) \qquad (3)$$

ومن هندسة الشكل يتضح أن

$$x = a\,\theta + c\cos\theta \qquad (4)$$

$$y = a - c\sin\theta \qquad (5)$$

وبتفاضل (5) ,(4) مرتين بالنسبة للزمن نحصل على

$$\ddot{x} = a\,\ddot{\theta} - c\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = -c\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) ,(6) في (2) ,(1) على الترتيب نحصل على

$$F = M\,a\ddot{\theta} - M\,c\ddot{\theta}\sin\theta - M\,c\dot{\theta}^2\cos\theta \qquad (8)$$

$$R = M\,g - M\,c\ddot{\theta}\cos\theta + M\,c\dot{\theta}^2\sin\theta \qquad (9)$$

وبالتعويض من (9) ,(8) في (3) نحصل على

$$\ddot{\theta} - \frac{a\,c\cos\theta}{k^2 + c^2 + a^2 - 2\,a\,c\sin\theta}\dot{\theta}^2 = \frac{g\,c\cos\theta}{k^2 + c^2 + a^2 - 2\,a\,c\sin\theta} \qquad (10)$$

المعادلة (10) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}-\frac{2ac\cos\theta}{k^2+c^2+a^2-2ac\sin\theta}\dot{\theta}^2=\frac{2gc\cos\theta}{k^2+c^2+a^2-2ac\sin\theta} \qquad (11)$$

المعادلة (11) معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\dot{\theta}^2=\frac{2gc\sin\theta+c_1}{k^2+c^2+a^2-2ac\sin\theta} \qquad (12)$$

حيث c_1 ثابت يعين من الشروط الإبتدائية وهي عند $\theta=0$ كانت $\dot{\theta}=0$ ومنها نحصل على $c_1=0$ وبذلك تصبح المعادلة(12) على الصورة

$$\dot{\theta}^2=\frac{2gc\sin\theta}{k^2+c^2+a^2-2ac\sin\theta} \qquad (13)$$

ومن المعادلتين (13) ,(10) نحصل على أن

$$\dot{\theta}^2\Big|_{\theta=0}=0,\ddot{\theta}\Big|_{\theta=0}=\frac{gc}{k^2+c^2+a^2} \qquad (14)$$

وبالتعويض من (14) في (9) ,(8) نحصل على

$$F\Big|_{\theta=0}=\frac{Magc}{k^2+c^2+a^2},R\Big|_{\theta=0}=Mg-\frac{Mgc^2}{k^2+c^2+a^2} \qquad (15)$$

وحيث أن شرط التدحرج في البداية هو

$$F\Big|_{\theta=0}<\mu R\Big|_{\theta=0} \qquad (16)$$

وبالتعويض من (15) في (16) نحصل على

$$\frac{ac}{k^2+a^2}<\mu$$

وحيث أن شرط الإنزلاق في البداية هو

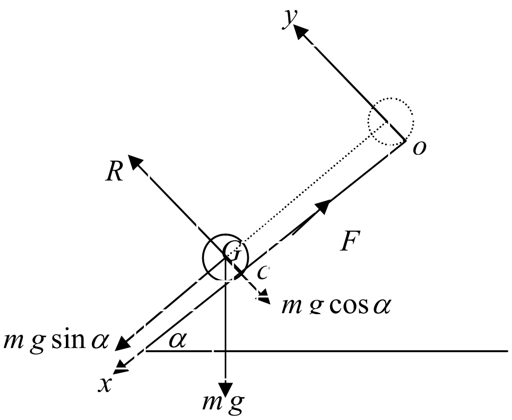
$$F\Big|_{\theta=0}\geq\mu R\Big|_{\theta=0} \qquad (17)$$

وبالتعويض من (15) في (17) نحصل على

$$\mu \le \frac{a c}{k^2 + a^2}$$

مثال:

وضعت كرة مصمتة منتظمة أعلى مستوى مائل خشن أوجد الشرط اللازم لكي يمكن حدوث حركة تدحرجية بحتة.



الحل

بأخذ محاور الإحداثيات وتحليل القوى المؤثرة على الكرة المصمتة كما هو موضح بالرسم نجد أن معادلتي الحركة الإنتقالية لمركز ثقل الكرة المصمتة G هما

$$m\ddot{x} = m g \sin\alpha - F \qquad (1)$$

$$0 = R - m g \cos\alpha \qquad (2)$$

ومعادلة الحركة الدورانية حول مركز ثقل الكرة المصمتة G هي

$$I_G \ddot{\theta} = F a \qquad (3)$$

حيث $I_G = \frac{2}{5} m a^2$ هو عزم القصور الذاتي للكرة المصمتة حول G ، a نصف قطر الكرة المصمتة

وبذلك تصبح المعادلة (3) على الصورة

$$\frac{2}{5} m a^2 \ddot{\theta} = F a \qquad (4)$$

وحيث أن المعادلات (1), (2), (4) لا تكفي لتعيين المجاهيل الأربعة x, θ, F, R فإننا نلجأ إلى الشروط الكينماتيكية للحركة وهي

سرعة نقطة التماس كجزء من الكرة = سرعة نقطة التماس كجزء من المستوى حيث سرعة نقطة التماس كجزء من الكرة تعطى بالعلاقة التالية:

$$v_c = v_G + v_{cG} \qquad (5)$$

ولكن سرعة نقطة التماس كجزء من المستوى=0 أي أن

$$0 = \dot{x} - a\dot{\theta} \qquad (6)$$

وبتفاضل (6) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (4) نحصل على

$$m\ddot{x} = \frac{5}{2}F \qquad (8)$$

وبالتعويض من (8) في (1) نحصل على

$$F = \frac{2}{7} m\, g \sin\alpha \qquad (9)$$

ومن المعادلة(2) نحصل على

$$R = m\, g \cos\alpha \qquad (10)$$

وحيث أن الدحرجة البحته تحدث عندما يكون $F < \mu R$ أي أن μ $\frac{2}{7}\tan\alpha < \mu$ وهذا هو الشرط اللازم لحدوث حركة تدحرجية بحتة.

مثال

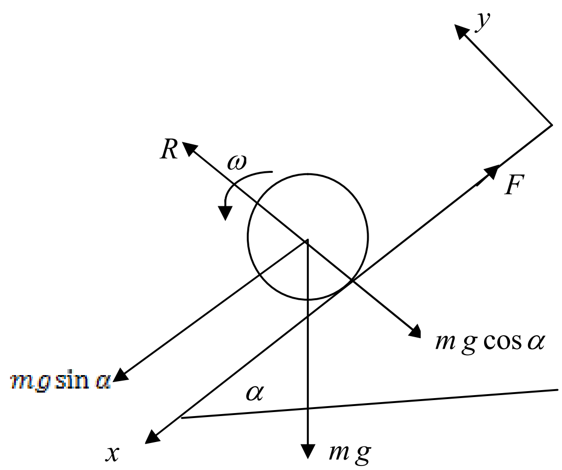
تتدحرج كرة مصمتة نصف قطرها a إلى أسفل مستوى مائل على الأفقي بزاوية α وخشن لحد كافي لمنع أي انزلاق للكرة عليه.أثبت أن مركز ثقل الكرة يتحرك بعجلة ثابتة مقدارها $\frac{5}{7} g\sin\alpha$.

الحل

معادلتا الحركة الانتقالية لمركز ثقل الكرة هما

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F \qquad (1)$$

$$0 = R - mg\cos\alpha \qquad (2)$$



معادلة الحركة الدورانية للكرة حول مركز ثقلها هي

$$I_G \ddot{\theta} = aF \qquad (3)$$

وحيث أن عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة

نصف قطرها a حول قطر فيها يكون

$I_G = \frac{2}{5} m a^2$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$\frac{2}{5} ma \; \ddot{\theta} \; = \; F \qquad (4)$$

ومن الشروط الكينماتيكية للحركة نعلم أن

$$v_c = v_G + v_{cG} \qquad (5)$$

وحيث أن حركة الكرة تدحرجية فإن $v_c = 0$ وتصبح المعادلة (5) على الصورة التالية

$$0 = \dot{x} - a\dot{\theta} \qquad (6)$$

وبتفاضل (6) بالنسبة للزمن نحصل على

$$\ddot{x} = a\ddot{\theta} \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) في (4) نحصل على

$$\frac{2}{5} m \; \ddot{x} \; = \; F \qquad (8)$$

وبالتعويض من (8) في (1) نحصل على العجلة التي يتحرك بها مركز ثقل الكرة

$$\ddot{x} \; = \; \frac{5}{7} g \, \sin \; \alpha \qquad (9)$$

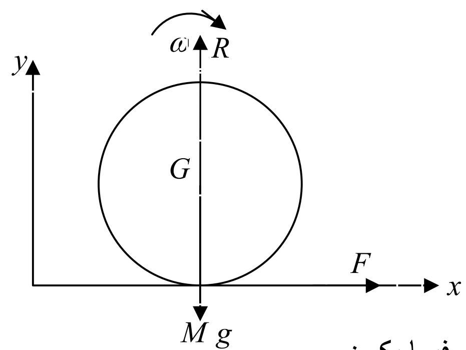
مثال:

كرة مصمتة متجانسة نصف قطرها a تدور بسرعة زاوية $\omega_\circ$ حول قطر أفقي وضعت برفق

علي منضدة أفقية معامل احتكاكها μ اثبت أن سيوجد انزلاق عند نقطة الالتقاء لزمن $\dfrac{2\omega_\circ a}{7\mu g}$

وبعد ذلك ستتدحرج الكرة بسرعة زاوية $\dfrac{2\omega_\circ}{7}$.

الحل



معادلتا الحركة الانتقالية لمركز ثقل الكرة هما

$$m\,\ddot{x} = F \qquad (1)$$

$$0 = R - mg \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية للكرة حول مركز ثقلها هي

$$I_G\ddot{\theta} = -aF \qquad (3)$$

وحيث أن عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة نصف قطرها a حول قطر فيها يكون

$I_G = \dfrac{2}{5}m\,a^2$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$\frac{2}{5}ma\,\ddot{\theta} = -F \qquad (4)$$

المعادلتان (4) ,(1) تحتويان علي ثلاث مجاهيل وهم $\ddot{x},\ddot{\theta},F$ ونحتاج إلي معادلة ثالثة وتأتي من

شرط الانزلاق للجسم المتماسك و هو

$$F = \mu R \qquad (5)$$

وبالتعويض من (2) في (5) نحصل على

$$F = m\mu g \qquad (6)$$

وبالتعويض من (6) في (4) ,(1) نحصل علي

$$\ddot{x} = \mu g \qquad (7)$$

$$\frac{2}{5}a\ddot{\theta}=-\mu g \qquad (8)$$

بتكامل (7) ، (8) نحصل علي

$$\dot{x}=\mu gt+c_1 \qquad (9)$$

$$\frac{2}{5}a\dot{\theta}=-\mu g t+c_2 \qquad (10)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان يعينان من الشروط الابتدائية للحركة وهي عند $t=0$ كانت $\dot{x}=0$

وبذلك يكون $c_1=0$ وعند $t=0$ كانت $\dot{\theta}=\omega_\circ$ وبذلك يكون $c_2=\frac{2}{5}\omega_\circ a$

وبذلك تصبح المعادلتان (10) , (9) علي الصورتين التاليتين

$$\dot{x}=\mu g t \qquad (11)$$

$$\frac{2}{5}a\dot{\theta}=\frac{2}{5}\omega_\circ a-\mu g t \qquad (12)$$

يستمر الانزلاق حتى يبدأ التدحرج عندما تكون $v_c=0$ ولكن

$$v_c=0=\dot{x}-a\dot{\theta} \qquad (13)$$

بالتعويض من (12),(11) في (13) نحصل علي

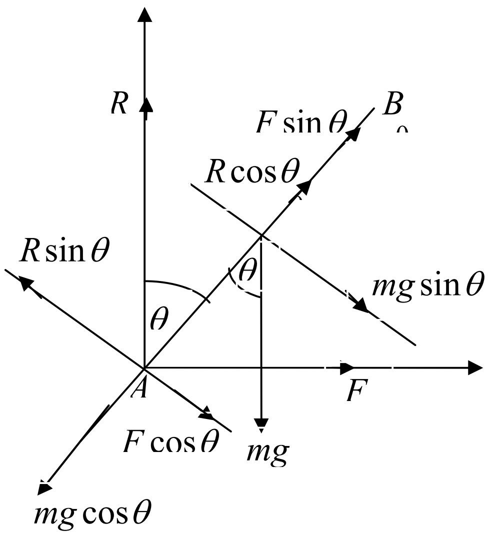
$$t=\frac{2\omega_\circ a}{7\mu g} \qquad (14)$$

ولإيجاد السرعة الزاوية التي تبدأ الكرة بها التدحرج نقوم بالتعويض من (14) في (12) فنحصل

علي $\dot{\theta}=\frac{2}{7}\omega_\circ$.

<u>مثال:</u>

قضيب ثقيل AB طوله $2a$ قد امسك به مائلا بزاوية α على الرأس إلى أعلي و مرتكز بطرفه الأسفل A على منضدة أفقية خشنة معامل احتكاكها μ إذا ترك القضيب ليسقط. فأثبت انه سيبدأ في الدوران حول A بدون انزلاق إذا كانت $\mu>\frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.



الحل

معادلتا الحركة الانتقالية لمركز ثقل القضيب هما

$$-ma\dot{\theta}^2 = F\sin\theta + R\cos\theta - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$ma\ddot{\theta} = F\cos\theta - R\sin\theta + mg\sin\theta \qquad (2)$$

معادلة الحركة الدورانية للقضيب حول A

$$I_A\ddot{\theta} = mga\sin\theta \qquad (3)$$

وحيث أن عزم القصور الذاتي لقضيب طوله $2a$

عند طرفه يعطى بالعلاقة التالية $I_A = \frac{4}{3}ma^2$ وبذلك تصبح المعادلة (3) علي الصورة

$$a\ddot{\theta} = \frac{3}{4}g\sin\theta \qquad (4)$$

المعادلة (4) يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$a\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{3}{4}g\sin\theta\,d\theta \qquad (5)$$

وبتكامل المعادلة (5) نحصل على

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{4}g\cos\theta + c_1 \qquad (6)$$

حيث c_1ثابت يعين من الشروط الإبتدائية للحركة وهي عند $\theta = \alpha$ كانت $\dot{\theta} = 0$ ومنها نحصل

على $c_1 = \frac{3}{4}g\cos\alpha$ وبذلك تصبح (6) على الصورة التالية

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g(\cos\alpha - \cos\theta) \qquad (7)$$

وبالتعويض من (7) ,(4) في(1) ,(2) على الترتيب نحصل على

$$\frac{mg}{2}(5\cos\theta - 3\cos\alpha) = F\sin\theta + R\cos\theta \qquad (8)$$

$$\frac{mg}{4}\sin\theta = R\sin\theta - F\cos\theta \qquad (9)$$

وبحل المعادلتين (9) ,(8) بالنسبة إلى F, R نحصل على

$$F = \frac{3mg}{4}\left(3\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\alpha\right) \qquad (10)$$

$$R = \frac{mg}{4}\left(1 + 9\cos^2\theta - 6\cos\theta\cos\alpha\right) \qquad (11)$$

وبحساب F, R عند $\theta = \alpha$ نحصل على

$$F = \frac{3mg\sin\alpha\cos\alpha}{4} \qquad (12)$$

$$R = \frac{mg}{4}\left(1 + 3\cos^2\alpha\right) \qquad (13)$$

وحيث أن شرط عدم انزلاق القضيب هو $F < \mu R$ ومن هذا الشرط نحصل على

$$\mu > \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}$$